

CORRIGÉ DU T.D. N° 11

Espaces vectoriels normés

20 JANVIER 2025

Exercice 1. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N(P) = |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

Montrer que la fonction N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Soient α un réel, P et Q deux polynômes :

$$* \forall t \in [0, 1], (\alpha P)'(t) = \alpha P'(t), \text{ d'où } N(\alpha P) = |\alpha P(0)| + \int_0^1 |\alpha P'(t)| dt = |\alpha| N(P);$$

** D'une part $|(P+Q)(0)| = |P(0)+Q(0)| \leq |P(0)|+|Q(0)|$, d'autre part $\forall t \in [0, 1], |(P+Q)'(t)| = |P'(t)+Q'(t)| \leq |P'(t)|+|Q'(t)|$, d'où (croissance de l'intégrale) $\int_0^1 |(P+Q)'(t)| dt \leq \int_0^1 |P'(t)| dt + \int_0^1 |Q'(t)| dt$, d'où $N(P+Q) \leq N(P)+N(Q)$;

*** Si $N(P) = 0$, alors $\begin{cases} P(0) = 0 & (\heartsuit) \\ \int_0^1 |P'(t)| dt = 0 & (\heartsuit\heartsuit) \end{cases}$. Or la fonction $|P'|$ est positive (car c'est une valeur absolue) et continue (car c'est la valeur absolue d'un polynôme) sur $[0, 1]$ d'où $(\heartsuit\heartsuit)$ implique qu'elle est nulle sur $[0, 1]$. D'où la fonction P est constante sur l'intervalle $[0, 1]$, elle est donc nulle sur $[0, 1]$ car (\heartsuit) . Le polynôme P a donc une infinité de racines, donc le polynôme P est nul. On en déduit que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ (et *a fortiori* sur tout *sev* de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$, mais ce n'est pas demandé).

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} . Soient $\|f\|_1, \|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ les trois normes classiques d'une fonction f de E .

1. Soit la suite des fonctions f_n définies par

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = x^n$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_1, \|f_n\|_2$ et $\|f_n\|_\infty$.

2. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?

$$1. \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

$$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f_n(t)]^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 t^{2n} dt} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} t^n = 1.$$

2. Par l'absurde : supposons qu'il existe une constante α telle que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f\|_1$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f_n\|_1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \alpha \cdot \frac{1}{n+1}$. C'est absurde car $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, donc les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
3. Par l'absurde : supposons qu'il existe une constante β telle que $\forall f \in E, \|f\|_2 \leq \beta \cdot \|f\|_1$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_2 \leq \beta \cdot \|f_n\|_1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \beta \cdot \frac{1}{n+1}$. C'est absurde car $\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, donc les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des suites u bornées telles que $u_0 = 0$.

1. Montrer que

$$\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

sont deux normes sur E .

2. Déterminer un réel k tel que : $\forall u \in E, N(u) \leq k \cdot \|u\|$.
3. Quel est le meilleur k possible ?
4. Soit un réel $a \in]0, 1[$. Soit u la suite définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + a^n.$$

Calculer $N(u)$ et $\|u\|$.

5. Les normes $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ sont-elles équivalentes ?

1. $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est une norme sur E car :

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \|\lambda u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda u_n| = |\lambda| \|u\|$;

** $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\|$ qui est un majorant, d'où $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ car $\|u + v\|$ est le plus petit majorant ;

*** $\|u\| = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = 0 \implies u = 0$.

$N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$ est une norme car :

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, N(\lambda u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda(u_{n+1} - u_n)| = |\lambda| N(u)$;

** $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n)| \leq |u_{n+1} - u_n| + |v_{n+1} - v_n| \leq N(u) + N(v)$ qui est un majorant, d'où $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ car $N(u + v)$ est le plus petit majorant ;

*** $N(u) = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \implies u = u_0 = 0$ car $u_0 = 0$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq |u_n| + |u_{n+1}| \leq 2\|u\|$ qui est un majorant, d'où $N(u) \leq 2\|u\|$ car $N(u)$ est le plus petit majorant.

3. 2 est le plus petit k tel que $\forall u \in E, N(u) \leq k\|u\|$ car : si $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = (-1)^n \end{cases}$, alors $N(u) = 2\|u\|$ et $u \neq 0_E$.

4. $N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a^n| = 1$ car : $a^0 = 1$ et la suite (a^n) décroît car $a \in]0, 1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a}$ car $a \neq 1$. De plus, $a < 1$, d'où : $|u_n| = u_n \leq \frac{1}{1-a}$ qui est majorant. Et c'est le plus petit majorant car $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{1-a}$. Donc $\|u\| = \frac{1}{1-a}$.

5. Par l'absurde : supposons qu'il existe une constante γ telle que $\forall u \in E, \|u\| \leq \gamma N(u)$. En particulier, pour la suite u de la question précédente, $\|u\| = \frac{1}{1-a} \leq \gamma N(u) = \gamma$. Ceci est vrai pour tout $a \in]0, 1[$ et les inégalités larges passent à la limite. Or $\frac{1}{1-a} \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} +\infty$. C'est absurde, donc les normes $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 (Une fonction additive et continue est linéaire).

Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **additive**, i.e. $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

1. Soit un vecteur $x \in E$. Montrer que :

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(nx) = n\varphi(x)$;

(b) pour tout $k \in \mathbb{Z}, \varphi(kx) = k\varphi(x)$;

(c) pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}\varphi(x)$.

2. On munit l'espace vectoriel E d'une norme et on suppose que la fonction φ est additive et continue. Montrer que :

(a) pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ \triangleright **densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}**

(b) la fonction φ est linéaire.

1. (a) Par récurrence, on montre pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P_n \ll \varphi(nx) = n\varphi(x) \gg$.
 - Par additivité, $\varphi(x + 0_E) = \varphi(0_E) + \varphi(x)$, d'où $\varphi(0_E) = 0$. Or $0x = 0_E$, d'où P_0 .
 - On suppose P_n . Par additivité, $\varphi(nx + x) = \varphi(nx) + \varphi(x) = n\varphi(x) + \varphi(x)$ car P_n . Donc P_{n+1} .
 - Donc $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par additivité, $\varphi(nx + (-nx)) = \varphi(nx) + \varphi(-nx)$. Or $\varphi(0_E) = 0$, d'où $\varphi(-nx) = -\varphi(nx)$ qui est égal à $-\varphi(nx)$ d'après la question précédente. Donc $\varphi(kx) = k\varphi(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : q\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \varphi\left(q\frac{p}{q}x\right) = \varphi(px) = p\varphi(x)$. On divise par q qui n'est pas nul : $\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}\varphi(x)$.
2. (a) Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$. De l'additivité de φ , on a déduit que $\forall r \in \mathbb{Q}, \varphi(rx) = r\varphi(x)$. Or \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe donc une suite de rationnels r_n tels que $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(r_n x) = r_n \varphi(x)$ et :
 - d'une part, $r_n \varphi(x)$ tend vers $\lambda \varphi(x)$;
 - d'autre part, $\varphi(r_n x)$ tend vers $\varphi(\lambda x)$ car $r_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda x$ et la fonction φ est continue.
 Donc $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ par unicité de la limite.
- (b) Soient un réel λ et deux vecteurs x et $y : \varphi(\lambda x + y) = \varphi(\lambda x) + \varphi(y)$ par additivité et on vient de montrer que $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$. Donc $\varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$: la fonction φ est linéaire.

Exercice 5 (Mines Ponts PC 2009).

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{id}_E)$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)x = u^{n+1}(y) - y$.
2. On suppose que u est 1-lipschitzien. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{id}_E)$.

1. Soit x dans l'intersection des deux sous-espaces en question. Il existe alors $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$, et il vérifie $x = u(x)$. Mais alors $x = u^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui s'écrit encore

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$

En sommant ces égalités pour $0 \leq k \leq n$, on obtient, par télescopage,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)x = u^{n+1}(y) - y.$$

2. Comme E est de dimension finie, la formule du rang appliquée à l'endomorphisme $v = u - \text{id}_E$ montre que $\dim \text{Ker}(u - \text{id}_E) + \dim \text{Im}(u - \text{id}_E) = \dim E$. Il reste à montrer que $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{id}_E) = \{0_E\}$. De la première question, l'inégalité triangulaire permet de déduire que $(n+1)\|x\| \leq \|u^{n+1}(y)\| + \|y\|$. Comme u est 1-lipschitzienne, il en est de même de toutes les puissances de u , donc $\|u^{n+1}(y)\| \leq \|y\|$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x\| \leq \frac{2\|y\|}{n+1}.$$

Les inégalités larges passant à la limite, on obtient $\|x\| = 0$ en faisant tendre n vers ∞ , donc $x = 0$.

Exercice 6. Soit un entier $n \geq 2$. On munit l'ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de la norme définie par

1. $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$

(On a déjà montré que c'est une norme, qu'elle est subordonnée et donc sous-multiplicative \triangleright [exemple 45 et proposition 44 du chapitre XI](#)). Justifier que la trace tr est une forme linéaire continue et déterminer, en fonction de n , sa norme subordonnée $\|\text{tr}\|$.

2. $\|M\| = \max_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} |m_{ij}|.$

Montrer que cette norme n'est pas sous-multiplicative mais que $n\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative.

3. $\|M\| = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}.$

Montrer que cette norme est sous-multiplicative \triangleright [une inégalité de Cauchy-Schwarz dans \$\mathbb{R}^n\$](#) . Mais qu'elle n'est pas une norme subordonnée \triangleright [calculer \$\|I_n\|\$](#) .

1. On sait que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers \mathbb{R} , donc une forme linéaire. De plus l'application tr est continue car :

— (première méthode) l'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie et toute application linéaire sur un ev de dimension finie est continue ;

— (seconde méthode) pour toute matrice carrée A , $|\text{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{i=1}^n \|A\| = n\|A\|$. Par

suite, l'application tr est n -lipschitzienne, donc continue. Et n est le meilleur (le plus petit) rapport possible car $|\text{tr}(I_n)| = n \cdot \|I_n\|$. Donc $n = \|\text{tr}\|$.

2. La norme $\|\cdot\|$ n'est pas sous-multiplicative car (voici un contre-exemple), en notant U la matrice carrée dont tous les éléments valent 1 : $\|U\| = 1$ mais $U^2 = nU$, d'où $\|U^2\| = n > 1 \times 1 = \|U\| \|U\|$ car $n \geq 2$.

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ dans \mathcal{M}_n . Notons $C = AB = (c_{i,j})$:

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad |c_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \|A\| \|B\| \sum_{k=1}^n 1 = n\|A\| \|B\|$$

qui est un majorant. Le maximum étant le plus petit majorant, $\|C\| = \|AB\| \leq n\|A\| \|B\|$, c'est-à-dire $n\|AB\| \leq n\|A\| n\|B\|$, ce qui signifie que la norme $n\|\cdot\|$ est sous-multiplicative.

3. Par l'absurde : si la norme euclidienne $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée à une norme $N : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, alors $\|I_n\| = \sup_{X \neq 0} \frac{N(I_n X)}{N(X)} = 1$. C'est absurde car $\|I_n\| = \sqrt{n} \neq 1$. Mais c'est une norme sous-multiplicative. En effet, soient $A = (a_{ij})$ et

$B = (b_{ij})$ dans \mathcal{M}_n . Notons $C = AB = (c_{ij})$: alors $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ et $\|AB\|^2 = \|C\|^2 = \sum_{i,j} c_{ij}^2$. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n , $c_{ij}^2 = (\sum_k a_{ik} b_{kj})^2 \leq (\sum_k a_{ik}^2) (\sum_k b_{kj}^2)$. Donc $\|AB\|^2 \leq \sum_{i,j} [(\sum_k a_{ik}^2) (\sum_k b_{kj}^2)] = (\sum_{i,k} a_{ik}^2) (\sum_{j,k} b_{kj}^2) = \|A\|^2 \|B\|^2$.

Exercice 7 (inégalités de YOUNG, de HÖLDER & de MINKOWSKI).

Soient deux réels $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient u et v deux réels positifs. Prouver l'inégalité de YOUNG

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

de deux manières :

(a) en étudiant, pour tout $v \geq 0$ fixé, la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$;

(b) en utilisant la **concavité** de la fonction \ln .

2. Soient deux réels $a < b$ et l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a, b])$.

(a) Soient F et G deux fonctions positives de E telles que $\int_a^b F^p = \int_a^b G^q = 1$. Montrer que $\int_a^b FG \leq 1$.

(b) Soient f et g deux fonctions positives de E . Prouver l'inégalité de HÖLDER

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q \right)^{1/q}.$$

(c) Examiner le cas particulier où $p = q = 2$.

3. (a) Soient f et g deux fonctions positives de E . En remarquant que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p/q}$, prouver l'inégalité de MINKOWSKI

$$\left(\int_a^b (f+g)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b f^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p \right)^{1/p}.$$

(b) Montrer que $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel E .

▷ Dans le corrigé, on prouve aussi que : $\|f\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|f\|_\infty$.

1. (a) La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $\forall u \geq 0, \varphi'(u) = u^{p-1} - v$, d'où le tableau de variations :

u	0	$\frac{1}{v^{p-1}}$	$+\infty$
$\varphi'(u)$	-	0	+
φ		\searrow	\nearrow
		0	

La fonction φ est ainsi positive, d'où l'inégalité de Young.

- (b) Par concavité du logarithme, pour tous $x > 0$ et $y > 0$, $\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y$. Et par croissance de l'exponentielle, $\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{1/p}y^{1/q}$. Si $x = u^p$ et $y = v^q$, alors $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ si u et v sont strictement positifs. Et, si $u = 0$ ou $v = 0$, cette inégalité reste vraie.
2. (a) De l'inégalité de Young, on déduit que : $\forall t \in [a, b], F(t)G(t) \leq \frac{1}{p}[F(t)]^{1/p} + \frac{1}{q}[G(t)]^{1/q}$, d'où $\int_a^b FG \leq \frac{1}{p}\int_a^b F^p + \frac{1}{q}\int_a^b G^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ par croissance de l'intégrale.

- (b) La fonction g est positive et continue, d'où : si l'intégrale $\int_a^b g^q$ est nulle, alors la fonction g est nulle et l'inégalité de Hölder est donc vraie. De même si l'autre intégrale $\int_a^b f^p$ est nulle.

Si les deux intégrales sont non nulles, alors posons, pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = \frac{f(x)}{\left(\int_a^b f^p\right)^{1/p}}$ et $G(x) = \frac{g(x)}{\left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}}$,

de sorte que $\int_a^b F^p = \int_a^b G^q = 1$. On déduit alors de la question précédente que $\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}$.

- (c) Dans le cas où $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder s'écrit $\int_a^b fg \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$ et vaut pour toutes fonctions f et g positives et continues sur $[a, b]$. Par suite, en remplaçant f par $|f|$ et g par $|g|$, on obtient l'inégalité $\int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$ qui vaut pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$. Enfin, parce que $\left|\int_a^b fg\right| \leq \int_a^b |fg|$, il en résulte l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ $|\langle a, b \rangle| \leq \|f\|^2 \|g\|^2$ si on munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ du produit scalaire usuel.
3. (a) Si $\int_a^b (f+g)^p = 0$, alors la fonction $f+g$ est nulle car c'est une fonction continue et positive. Par suite les fonctions f et g sont nulles car elles sont positives. Et l'inégalité de Minkowski s'écrit $0 \leq 0 + 0$.
Sinon $\int_a^b (f+g)^p = \int f(f+g)^{p/q} + \int g(f+g)^{p/q}$. On applique l'inégalité de Hölder au premier terme : $\int f(f+g)^{p/q} \leq \left(\int f^p\right)^{1/p} \left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$. De même pour le second terme : $\int g(f+g)^{p/q} \leq \left(\int g^p\right)^{1/p} \left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$. Par suite $\int_a^b (f+g)^p \leq \left[\left(\int f^p\right)^{1/p} + \left(\int g^p\right)^{1/p}\right] \left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$. On obtient l'inégalité de Minkowski en divisant par $\left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$ qui est strictement positif.
- (b) On vérifie les trois axiomes d'une norme :

- la fonction $|f|^p$ est positive et continue, d'où : $\int_a^b |f|^p = 0 \implies |f|^p = 0 \implies f = 0$;
- pour tout réel α , $\int_a^b |\alpha f|^p = |\alpha|^p \int_a^b |f|^p$;
- si f et g sont deux fonctions de E , alors $\int_a^b |f+g|^p \leq \int_a^b (|f|+|g|)^p$ par croissance de l'intégrale. D'où $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b (|f|+|g|)^p\right)^{1/p}$ car la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ est croissante sur \mathbb{R}_+ . Et $\left(\int_a^b (|f|+|g|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$ d'après l'inégalité de Minkowski. On a ainsi prouvé l'inégalité triangulaire.

REMARQUE — Montrons que, pour toute fonction $f \in E$, $\|f\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$.

Si la fonction f est nulle, alors $\|0_E\|_p = 0 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 = \|0_E\|_\infty$.

Sinon $\|f\|_\infty$ est le réel $M = \max_{[a, b]} |f| > 0$. Soit ε tel que $M > \varepsilon > 0$:

- d'une part $|f| \leq M$ sur le segment $[a, b]$;
- d'autre part il existe un intervalle de longueur $\eta > 0$ sur lequel $|f| \geq M - \varepsilon$ par continuité de la fonction f .

D'où $\eta(M - \varepsilon)^p \leq \int_a^b |f|^p \leq (b - a)M^p$. Donc $\eta^{1/p}(M - \varepsilon) \leq \|f\|_p \leq (b - a)^{1/p}M$.

D'une part, $\eta^{1/p} = e^{(\ln \eta)/p}$ tend vers 1 par continuité de la fonction \exp , d'où $\eta^{1/p}(M - \varepsilon) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} M - \varepsilon$, donc

$M - 2\varepsilon \leq \eta^{1/p}(M - \varepsilon)$ à partir d'un certain rang. D'autre part, $(b - a)^{1/p}M \xrightarrow{p \rightarrow \infty} M$, d'où $(b - a)^{1/p}M \leq M + \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

Donc $M - 2\varepsilon \leq \|f\|_p \leq M + \varepsilon$ à partir d'un certain rang. On en déduit que $\|f\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} M = \|f\|_\infty$.

Exercice 8 (Séries entières & convergence uniforme). Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n défini par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}.$$

Soit $R > 0$. On munit l'ev $E = \mathcal{C}([-R, +R])$ de la norme ∞ .

1. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans l'evn E . Quelle est sa limite ?
2. L'ensemble des fonctions polynomiales est-il un fermé de l'espace vectoriel normé E ?
3. Montrer que, à partir d'un certain rang N , aucun polynôme P_n ne s'annule sur l'intervalle $[-R, +R]$.

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ est infini. Sur le segment $[-R, +R] \subset]-\infty, +\infty[$, cette série entière converge normalement, donc uniformément, vers la fonction $f : [-R, +R] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$. D'où $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
2. L'ensemble F des fonctions polynomiales est une partie de E mais cette partie F n'est pas fermée car la suite de fonctions polynomiales $P_n \in F$ converge (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers la fonction $f \notin F$ (l'exponentielle n'est pas un polynôme car elle n'est pas nulle et elle est sa propre dérivée). Cela contredit la caractérisation séquentielle d'un fermé.
3. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot e^{-R}$. D'après la première question, il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall x \in [-R, +R], \forall n \geq N, |P_n(x) - e^x| \leq \varepsilon.$$

Soient $n \geq N$ et $x \in [-R, +R] : e^x = e^x - P_n(x) + P_n(x)$, d'où $|e^x| \leq |e^x - P_n(x)| + |P_n(x)|$, d'où

$$|P_n(x)| \geq |e^x| - |e^x - P_n(x)| \geq e^{-R} - \frac{1}{2} \cdot e^{-R} \geq \frac{1}{2} \cdot e^{-R} > 0.$$

Donc le polynôme P_n ne s'annule pas sur l'intervalle $[-R, +R]$.

Exercice 9. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n . Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $A^n = 0$. En déduire que l'ensemble des matrices nilpotentes de taille n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit une matrice A nilpotente. Il existe alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Par suite il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$. Puis on montre que la famille $(X, AX, \dots, A^{p-1}X)$ de p vecteurs colonnes est libre ▷ Exercice 34 du chapitre II. On en déduit que $p \leq n$ car la dimension de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ vaut n . Or $A^p = 0$. D'où $A^n = A^p \cdot A^{n-p} = 0 \cdot A^{n-p} = 0$. Réciproquement, si $A^n = 0$, alors A est nilpotente.

De cette équivalence, on déduit que l'ensemble des matrices nilpotentes est égal à l'image réciproque de l'ensemble $\{0_{\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})}\}$ par l'application $f : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), M \mapsto M^n$. Or f est continue car (\star) et $\{0_{\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})}\}$ est un fermé, donc $f^{-1}(\{0_{\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})}\})$ est un fermé.

(\star) f est la composée $g \circ h$ des applications $h : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})^n, M \mapsto (M, \dots, M)$ et $g : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})^n \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), (M_1, \dots, M_n) \mapsto M_1 \times \dots \times M_n$ qui sont continues car g est linéaire sur un ev de dimension finie et h est multilinéaire sur un ev de dimension finie.

2. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, on sait qu'une suite de matrices converge si, et seulement si, chacune de ses coordonnées converge. Soit T une matrice triangulaire : ses valeurs propres sont égales à ses éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Si ces valeurs propres sont toutes égales, alors on pose $\varepsilon = 42$. Sinon,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j|.$$

Puis on définit, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, une matrice

$$T_k = T - \text{diag} \left(\frac{\varepsilon}{k}, \frac{\varepsilon}{2k}, \dots, \frac{\varepsilon}{nk} \right).$$

La suite (T_k) converge vers T et chaque matrice T_k est diagonalisable car ses valeurs propres sont distinctes deux à deux. Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: toute matrice A est donc trigonalisable. Par suite, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T = P^{-1}AP$ est triangulaire. Or on vient de montrer qu'il existe une suite de matrices diagonalisables T_k qui converge vers T .

On définit, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, $A_k = PT_kP^{-1}$. D'une part, chaque matrice A_k est diagonalisable car semblable à la matrice diagonalisable T_k . D'autre part, la suite (A_k) converge vers A . En effet $T_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T$, d'où $PT_kP^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} PTP^{-1}$ car l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (comme toutes les applications linéaires sur un ev de dimension finie).

Exercice 10 (Une norme est euclidienne ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme).

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Soit $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

1. Soient x, y et z trois vecteurs de E . Montrer que :
 - (a) $f(x + y, z) + f(x - y, z) = 2f(x, z)$;
 - (b) $f(0_E, z) = 0$ et $f(2x, z) = 2f(x, z)$;
 - (c) $f(x, z) + f(y, z) = f(x + y, z)$.
2. Montrer que la fonction f est bilinéaire, symétrique, définie et positive
 ▶ l'exercice 4 de ce TD et le corollaire 36 du chapitre XI.
3. En déduire qu'il existe un unique produit scalaire tel que $\forall v \in E, \langle v|v \rangle = \|v\|^2$.

Voir le corrigé manuscrit ci-dessous.

Exercice 11. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E , \bar{A} et \bar{B} leur adhérence. Montrer que :

1. si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$;
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
4. Soit $E = \mathbb{R}$. Trouver deux parties A et B de \mathbb{R} telles que $\bar{A} \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

1. Hypothèse : $A \subset B$.

Première méthode : soit $x \in \bar{A}$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

D'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, y \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$. Or $y \in A \implies y \in B$ par hypothèse.

D'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in B, y \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$. D'où $x \in \bar{B}$.

Donc $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Deuxième méthode : on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Un point a est adhérent à A si, et seulement si, a est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de A .

Soit $x \in \bar{A}$. Alors x est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de A .

Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B$ par hypothèse. D'où x est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de B . D'où $x \in \bar{B}$.

Donc $\bar{A} \subset \bar{B}$.

2. ★ Montrons d'abord que : $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Première méthode : soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors

$$x \in \bar{A} \quad \text{ou} \quad x \in \bar{B}.$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad \forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset.$$

D'où $\forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. D'où $x \in \overline{A \cup B}$.

Donc $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Deuxième méthode : soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors $x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$. D'où : x est la limite d'une suite d'éléments de A ou d'une suite d'éléments de B . D'où : x est la limite d'une suite d'éléments de $A \cup B$. D'où $x \in \overline{A \cup B}$.

Donc $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

★★ Montrons ensuite que : $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Première méthode : soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \quad \heartsuit$$

— ou bien $x \in \bar{B}$;

- ou bien $x \notin \overline{B}$. Alors $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon_0) \cap B = \emptyset$.
D'où $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset$.
Or \heartsuit , d'où : $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
D'où $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. D'où $x \in \overline{A}$.

Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Deuxième méthode : soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors x est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de $A \cup B$.

- ou bien on peut extraire de (u_n) une suite d'éléments de B et alors $x \in \overline{B}$;
- ou bien à partir d'un certain rang N tous les u_n sont dans A . Alors x est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq N}$ dont tous les éléments sont dans A . D'où $x \in \overline{A}$.

Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

- Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$.
D'où $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.
D'où $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. D'où $x \in \overline{A \cap B}$.
Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
- Soient $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: alors $\overline{A \cap B} = \emptyset$ mais $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$.

Exercice 12 (Un hyperplan est, ou bien fermé, ou bien dense). Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E . Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit \overline{F} son adhérence.

- Montrer que \overline{F} est un *sev* de E .
- Soit un vecteur $u \in E$. On suppose que $E = \text{Vect}(u) \oplus F$ et $F \neq \overline{F}$.
 - Montrer que : il existe un vecteur $v \in \overline{F}$ tel que $E = \text{Vect}(v) \oplus F$.
 - En déduire que F est dense dans E .
- On munit l'ev $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie pour tout polynôme P par $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.
 - Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$ est continue mais que l'application $g : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(2)$ ne l'est pas.
 - Que dire de l'hyperplan $F = \text{Ker}(f)$? Et de l'hyperplan $G = \text{Ker}(g)$?

▷ **Rappel sur les hyperplans** — On rappelle que, dans un \mathbb{K} -ev E (de dimension finie ou infinie), si un vecteur u n'appartient pas à un hyperplan H , alors l'hyperplan H et la droite $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires : $H \oplus \text{Vect}(u) = E$. ▷ **proposition 12 du chapitre II**

- Première méthode (avec des boules) : Soient $\varepsilon > 0$, $x \in \overline{F}$ et $y \in \overline{F}$. Alors $\exists a \in F$, $\exists b \in F$, $\|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|y - b\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
D'où $\|(x + y) - (a + b)\| \leq \|x - a\| + \|y - b\| \leq \varepsilon$. Donc $x + y \in \overline{F}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $\exists a \in F$, $\|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.
D'où $\|\lambda x - \lambda a\| \leq \varepsilon$. Donc $\lambda x \in \overline{F}$.
Seconde méthode (avec des suites) : Soient deux vecteurs u et v de \overline{F} : il existe des suites respectives (u_n) et (v_n) de vecteurs de F convergeant vers u et v respectivement. Soient deux réels λ et μ . Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $\lambda u_n + \mu v_n$ appartient à F car F est un *sev*. De plus, $\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda u + \mu v$ d'après le théorème des gendarmes car, d'après l'inégalité triangulaire, $0 \leq \|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda u + \mu v)\| \leq |\lambda| \|u_n - u\| + |\mu| \|v_n - v\|$, qui tend vers $|\lambda| \cdot 0 + |\mu| \cdot 0 = 0$.
En conclusion de l'une ou l'autre de ces méthodes, \overline{F} est un sous-espace vectoriel de F car :
* $0_E \in F$ et $F \subset \overline{F}$, d'où $0_E \in \overline{F}$;
** \overline{F} est stable par superpositions d'après la question précédente.
- $\overline{F} \neq F$ et $F \subset \overline{F}$, d'où $\exists v \in \overline{F} \setminus F$. Or $E = \text{Vect}(u) \oplus F$, d'où $v = \alpha u + v_F$, où $\alpha \neq 0$ et $v_F \in F$.
Soit $x \in E$: $x = \beta u + x_F = \frac{\beta}{\alpha} v + x_F - \frac{1}{\alpha} v_F$, d'où $E = \text{Vect}(v) + F$. La somme est directe car $\text{Vect}(v) \cap F = \{0_E\}$ car $x \in \text{Vect}(v) \cap F \implies \exists \gamma \in \mathbb{R}$, $x = \gamma v$ et $x \in F \implies \gamma = 0$ car $v \notin F$.
 - On a montré que \overline{F} est un *sev* de E , d'où $v \in \overline{F} \implies \text{Vect}(v) \subset \overline{F}$. De plus $F \subset \overline{F}$, d'où $\text{Vect}(v) \oplus F \subset \overline{F}$ car \overline{F} est un *sev* de E .
Or $E = \text{Vect}(v) \oplus F$, d'où $E \subset \overline{F}$, d'où $\overline{F} = E$, donc F est dense dans E .
- Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $|f(P) - |P(0)|| \leq \|P\|$, donc l'application linéaire f est continue.
Soit la suite des polynômes $P_n = \frac{X^n}{2^n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(P_n) = 1$, d'où la suite des réels $g(P_n)$ ne tend pas vers $0_{\mathbb{R}}$.
Or la suite des polynômes P_n tend vers $0_{\mathbb{R}[X]}$ car $\|P_n - 0_{\mathbb{R}[X]}\| = \frac{1}{2^n}$ ne tend pas vers $0_{\mathbb{R}}$. D'où $g(P_n)$ ne tend pas vers $g(0_{\mathbb{R}[X]})$ quand P_n tend vers $0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc l'application g n'est pas continue en $0_{\mathbb{R}[X]}$.
 - L'hyperplan F est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f . Mais l'hyperplan G est dense car il n'est pas fermé. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n - 1$ appartient à G car $g(P_n - 1) = 0$. Et la suite des polynômes $P_n - 1$ tend vers le polynôme -1 car $\|(P_n - 1) - (-1)\| = \frac{1}{2^n}$ tend vers $0_{\mathbb{R}}$. Or le polynôme -1 n'appartient pas à G , ce qui contredit la caractérisation séquentielle d'un fermé.

Exercice 13 (distance d'un vecteur à un ensemble). Soit A une partie non vide d'un *evn* E . Pour tout vecteur $x \in E$, on appelle *distance de x à A* et on note $d(x, A)$ le réel

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

1. Justifier que le réel $d(x, A)$ est bien défini.
2. Montrer que la distance de x à A est nulle si, et seulement si, x est adhérent à A , *i.e.*

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

3. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que : $\forall a \in A, d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|$. En déduire que :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

Qu'en déduire sur l'application $x \mapsto d(x, A)$?

4. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{x \in E \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\}$.

(a) Montrer que l'ensemble A_n est un ouvert de E et déterminer l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

(b) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable d'ouverts. Et que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.

1. Soit un vecteur $x \in E$: l'ensemble $\{\|x - a\|, a \in A\}$ est une partie minorée et non vide de \mathbb{R} , elle admet donc une borne inférieure $\inf_{a \in A} \|x - a\|$. Donc le réel $d(x, A)$ est bien défini.
2. La borne inférieure $d(x, A)$ est le plus grand des minorants, c'est donc :
 - un minorant, *i.e.* $\forall a \in A, d(x, A) \leq \|x - a\|$;
 - le plus grand, *i.e.* $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \|x - a\| < d(x, A) + \varepsilon$.

Par suite

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \|x - a\| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a \in B(x, \varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

3. Soit $a \in A$: $\begin{cases} d(x, A) \leq \|x - a\| \\ \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\| \end{cases}$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $\forall a \in A, d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|$ (\heartsuit).

On veut montrer que $-\|x - y\| \leq d(x, A) - d(y, A) \leq +\|x - y\|$, c'est-à-dire que : $\begin{cases} d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\| & (1) \\ d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\| & (2) \end{cases}$

De (\heartsuit), on déduit que : $\forall a \in A, d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|$ et donc que le réel $d(x, A) - \|x - y\|$ est un minorant de l'ensemble $\{\|y - a\|, a \in A\}$. Ce minorant est inférieur au plus grand des minorants, qui est $d(y, A)$. Donc $d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$, ce qui prouve l'inégalité (1). L'inégalité (2) est la même, après échange de x et de y .

L'inégalité $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ a été prouvée pour tout $(x, y) \in E^2$. On en déduit que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne et, par suite, qu'elle est continue.

4. (a) L'ensemble $A_n = \{x \in E \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\}$ est l'image réciproque de l'intervalle $] -\infty, \frac{1}{n}[$ par la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$. Or $] -\infty, \frac{1}{n}[$ est un ouvert de \mathbb{R} et l'application f est continue d'après la question précédente. Donc $A_n = f^{-1}(] -\infty, \frac{1}{n}[)$ est un ouvert de E .

$$\text{Soit } x \in E : x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, d(x, A) < \frac{1}{n} \iff d(x, A) = 0.$$

$$\text{Or } d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A} \text{ d'après la question 2. Donc } \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}.$$

- (b) Soit F un fermé de E . Alors F est égal à son adhérence \overline{F} . Et on vient de montrer que \overline{F} est l'intersection dénombrable des ouverts F_n .

Si O est un ouvert de E , alors son complémentaire $F = E \setminus O$ est un fermé. D'où $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$. Passons au

complémentaire : $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$, où chaque O_n est le complémentaire de l'ouvert F_n et est donc un fermé.

Exercice 14 (inégalité de BESSEL, égalité de PARSEVAL & polynômes orthogonaux).

Soit E un espace préhilbertien et $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E . Soit x un vecteur de E .

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F_n = \text{Vect}(e_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket)$. Montrer que la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ est décroissante.
2. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **totale**, i.e. $\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E . Montrer que la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ tend vers 0.
3. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée**, i.e. $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$. Prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de BESSEL :

$$\sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle^2 \leq \|x\|_2^2.$$

En déduire que la série numérique $\sum \langle x | e_k \rangle^2$ converge.

4. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée et totale**. Prouver l'égalité de PARSEVAL :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle x | e_k \rangle^2 = \|x\|_2^2.$$

5. Soient deux réels $a < b$. On munit l'ev $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ pour tout $(f, g) \in E^2$.
 - (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.
 - (b) On note $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ la norme ∞ de toute fonction $f \in E$. Déterminer une contante K telle que, pour tout $f \in E, \|f\|_2 \leq K \|f\|_{\infty}$.
 - (c) Soit $f \in E$. Montrer que $\|f - p_n(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ en utilisant le théorème d'approximation de WEIERSTRASS.
 - (d) Montrer que la série $\sum \langle f | e_n \rangle^2$ converge et déterminer sa somme.

1. Soit $n \in \mathbb{N} : \|x - p_{n+1}(x)\|_2 = \inf_{y \in F_{n+1}} \|x - y\|_2$ d'après le théorème des MOINDRES CARRÉS. Or $F_n \subset F_{n+1}$, d'où $\forall y \in F_n, \|x - y\|_2 \geq \|x - p_{n+1}(x)\|_2$ car l'*inf* est un minorant. En particulier, $p_n(x) \in F_n$, donc $\|x - p_n(x)\|_2 \geq \|x - p_{n+1}(x)\|_2$. La suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ est donc décroissante.
2. Soit $\varepsilon > 0$: la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est totale, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et un vecteur $y_N \in F_N$ tels que $\|x - y_N\|_2 \leq \varepsilon$. Or $\|x - p_N(x)\|_2 \leq \|x - y_N\|_2$. Et la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ est décroissante. D'où $\forall n \geq N, \|x - p_n(x)\|_2 \leq \varepsilon$. Donc $\|x - p_n(x)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
3. La famille $(e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une *b.o.n.* du sous-espace vectoriel F_n , d'où :

— d'après le théorème de la PROJECTION ORTHOGONALE, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle e_k$;

— d'après le théorème de PYTHAGORE, $\|p_n(x)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle^2$.

Or $\|p_n(x)\|_2^2 \leq \|x\|_2^2$ car, d'après le théorème de PYTHAGORE, $\|x - p_n(x)\|_2^2 + \|p_n(x)\|_2^2 = \|x\|_2^2$. Donc $\sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle^2 \leq \|x\|_2^2$.

La suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle^2$ est majorée (par $\|x\|_2^2$), elle est aussi croissante (car ses termes sont positifs), donc la série numérique $\sum \langle x | e_k \rangle^2$ converge.

4. $\|x\|_2^2 - S_n = \|x\|_2^2 - \|p_n(x)\|_2^2 = \|x - p_n(x)\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'où $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|_2^2$. Donc $\sum_{k=0}^{\infty} \langle x | e_k \rangle^2 = \|x\|_2^2$.
5. (a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une base du sous-espace vectoriel $F_n = \mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, \dots, X^n)$ à laquelle on peut appliquer l'algorithme de GRAM-SCHMIDT pour obtenir une *b.o.n.* (e_0, e_1, \dots, e_n) de F_n . La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une *b.o.n.* de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

- (b) Soit une fonction $f \in E$ et le réel $M = \|f\|_\infty$. Pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq M$. D'où $\int_a^b f^2(t) dt \leq \int_a^b M^2 dt = (b-a)M^2$.
Donc $\|f\|_2 \leq K\|f\|_\infty$ si on note $K = \sqrt{b-a}$ (qui est bien indépendant de f).
- (c) D'après le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, il existe une suite de polynômes P_n telle que $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$: il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - P_n\|_\infty \leq \varepsilon$. D'où $\|f - P_n\|_2 \leq K\varepsilon$. Or le polynôme P_n est une combinaison linéaire d'un nombre fini de polynômes e_n . Donc la suite des polynômes e_n est totale. Donc $\|f - p_n(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'après la question 2.
- (d) On a montré que la suite des polynômes e_n est totale et orthonormée. On en déduit que la série $\sum \langle f | e_n \rangle^2$ converge et que $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f | e_k \rangle^2 = \|f\|_2^2$ d'après l'égalité de PARSEVAL.

EXERCICE 12

Neceri à Romain
Lebidier.

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(x+y, z) + f(x-y, z) &= \frac{1}{4} (\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (\|y+(x+z)\|^2 - \|y+(x-z)\|^2 + \|y-(x+z)\|^2 - \|y-(x-z)\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (2\|y\|^2 + 2\|x+z\|^2 - 2\|y\|^2 - 2\|x-z\|^2) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{4} (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) = 2f(x, z). \quad \heartsuit
 \end{aligned}$$

$$f(0_E, z) = \frac{1}{4} (\|0_E+z\|^2 - \|0_E-z\|^2) = \frac{1}{4} (\|z\|^2 - \|z\|^2) = 0$$

$$\text{donc } f(2x, z) = f(x+x, z) = 2f(x, z) - f(x-x, z) = 2f(x, z) - f(0_E, z) = 2f(x, z)$$

$$f(x, y) + f(y, z) = \frac{1}{4} (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2)$$

$$= \frac{1}{4} (\|z+x\|^2 + \|z+y\|^2 - (\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2))$$

$$= \frac{1}{4} (\|z+m+d\|^2 + \|z+m-d\|^2 - (\|z-m-d\|^2 + \|z-m+d\|^2))$$

$$= \frac{1}{4} (2\|z+m\|^2 + 2\|d\|^2 - (2\|z-m\|^2 + 2\|d\|^2))$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} (\|m+z\|^2 - \|m-z\|^2) = 2f(m, z) = f(2m, z) = f(x+y, z)$$

ou $m = \frac{1}{2}(x+y)$ et $d = \frac{1}{2}(x-y)$, de sorte que $m+d = x$, $m-d = y$ et $2m = x+y$.

$$2. \text{ Soit } (x, y) \in E^2. \quad f(x, y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4} (\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = f(y, x) \text{ donc } f \text{ est symétrique.}$$

$$f(x, x) = \frac{1}{4} (\|2x\|^2 - \|0_E\|^2) = \|x\|^2 \text{ donc } f \text{ est positive et définie, par définition d'une norme.}$$

Soit $y \in E$. L'application $\varphi: E \rightarrow E, x \mapsto f(x, y)$ est additive d'après 1.c

La norme $\|\cdot\|$ est continue car lipschitzienne sur E .

$$\text{Donc pour } a \in E \text{ fixé, } f(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\|a+y\|^2 - \|a-y\|^2}{4} = f(a, y).$$

Donc l'application φ est additive et continue. D'après l'exercice 4, elle est linéaire.

Par symétrie, f est bilinéaire.

3. D'après 2, f est bilinéaire, symétrique, définie et positive, donc f est un produit scalaire, vérifiant $f(x, x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in E$ d'après 2.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire vérifiant $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = \|x\|^2$,

$$\text{alors pour tout } (x, y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\text{et } \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\text{d'où } \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 2(\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2)$$

$$\text{d'où } 4f(x, y) = 4\langle x, y \rangle$$

$$\text{d'où } f(x, y) = \langle x, y \rangle, \text{ d'où l'unicité de } f.$$

Donc il existe un unique produit scalaire tel que $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = \|x\|^2$.