Colle 15 Variables aléatoires

GUILCHER Oscar

Exercice 1. Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
   (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.
   (b) En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".
   (c) Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.
3. En 2013, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Solution **1.**

1. (a) *Soit R l'événement "le client a subi un retard". X est le nombre de réalisations de l'événement R de probabilité constante $1/4$ au cours de 4 appels indépendants. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4, 1/4)$. En particulier, on a :*

$$\mathbb{E}(X) = 1 \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}.$$

   (b) *On cherche $\mathbb{P}(X \geq 1)$:*

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

2. (a) *On note $p = 0,25$ et $q = 1 - 0,25$. On reconnait le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale. On a donc :*

$$\mathbb{P}(Z = k | Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

   (b) *On a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k, Y = n) &= \mathbb{P}(Y = n)\mathbb{P}(Z = k | Y = n) \\ &= \begin{cases} e^{-m} \frac{m^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

   (c) *Il faut réaliser la sommation ! On a, tenant compte du fait que les premiers termes sont nuls :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k, Y = n) \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n)!} \\ &= e^{-m} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} (mq)^k e^{mq} \\ &= e^{-mp} \frac{(mp)^k}{k!}. \end{aligned}$$

   Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.

3. *U est le rang de la première réalisation de l'événement R de probabilité $1/4$ au cours d'une succession d'appels indépendants. Y suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(1/4)$, c'est-à-dire que, pour $k \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

   On applique la formule du cours pour obtenir l'espérance (on on calcule simplement la somme d'une série géométrique), et on trouve que

$$\mathbb{E}(U) = 4.$$

ATTENBOROUGH Mallory

Exercice 2. 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - nP(X > n).$$

(b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

(c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ converge, et enfin que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

(a) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$? En déduire la loi de X.

(b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

(c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.

(d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N} = \dfrac{n}{n+1}$.

3. Montrer que si X admet un moment 'ordre 2, alors

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X > k).$$

Solution **2.** 1. (a) *Pour $n \geq 1$, on peut écrire :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)\mathbb{P}(X>k) - nP(X>n) + \mathbb{P}(X>0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) - nP(X>n).\end{aligned}$$

(b) *On a, pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$. La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.*

(c) *Si X admet une espérance, la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge. Mais :*

$$0 \leq nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

(d) i. *On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :*

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies \mathbb{P}(X>k) = 1-\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X\leq k)-\mathbb{P}(X\leq k-1) = \frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

ii. *Par la question précédente : $\mathbb{E}(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.*

iii. *On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

iv. *On a :*

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N} = 1-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \to 1-\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

(e) *On utilise le même type d'argument :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2\left(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\mathbb{P}(X>k) - n^2P(X>n).$$

Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2P(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq n^2P(X>n) = n^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2P(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X>k).$$

LE MENN Stévenn

Exercice 3. On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Calculer alors $\mathbb{E}(X)$.

Solution **3.** 1. *On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au $k-$ième lancer. L'événement $(X=2)$ correspond à :*

$$(X=2)=P_1P_2 \implies p_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

De même,

$$(X=3)=F_1P_2P_3 \implies p_2=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Pour $(X=4)$, cela se corse un peu !

$$(X=4)=F_1F_2P_3P_4\cup P_1F_2P_3P_4 \implies p_4=\frac{4}{27}.$$

2. *On s'inspire du calcul de p_4 : pour obtenir $X=n$, on peut :*
   - *ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer (proba 2/3). Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X=2$), donc avec encore une probabilité de 2/3. Maintenant, il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$ième. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}.*
   - *ou bien avoir obtenu face au 1er lancer (proba 1/3). Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ième, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}.*

   D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n=\frac{2}{9}p_{n-2}+\frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3. *On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2=r/3+2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement :*

$$p_n=\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n+\beta\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

   On détermine α et β en testant sur les premiers termes. On obtient :

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

4. *Il est bien connu que pour tout $q\in]-1,1[$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nq^n=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

   On en déduit :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}np_n=\frac{17}{4}.$$

Exercice 4. Une fonction f convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle est une fonction telle que

$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$

Lors d'une soirée, n amis ($n \geq 2$) jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. La somme de n euros est partagée (théoriquement sous forme fractionnaire) entre les gagnants (ceux qui ont fait le bon choix). S'il n'y a pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.

1. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on note X_k la somme aléatoire que reçoit le joueur k. Calculer l'espérance de X_k.
2. Dans cette question, on suppose qu'une nouvelle personne arrive avant que la pièce ne soit lancée. On demande à un joueur s'il accepte que cette nouvelle personne participe au jeu.
   Que doit répondre ce joueur s'il veut maximiser le gain espéré ? Quel doit être l'avis du serveur si il veut maximiser le pourboire espéré ?
3. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de points de I et tout n-uplet $(t_1, ..., t_n)$ de réels positifs tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :
   $$f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n).$$
   (b) Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I. Montrer que :
   $$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$
4. On se place à nouveau dans un jeu à n joueurs.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(X_k^2)$ sous forme d'une somme finie.
   (b) Montrer que :
   $$\mathbb{E}(X_k^2) \geq \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

Solution **4.**

1. *Posons* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *la variable aléatoire à valeur dans* $\{0, n\}$.
   $(S_n = 0)$ *ssi tous les joueurs perdent. Les variables* X_i *sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre* $1/2$. $\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. *On en déduit*

$$\mathbb{E}(S_n) = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = n \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

   On en déduit que $\mathbb{E}(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. *Le gain moyen augmente avec le nombre de joueurs, donc le joueur à intérêt d'accepter un nouveau joueur.*
   Par contre, le gain moyen du serveur est $\frac{n}{2^n}$ *et* $x \mapsto \frac{x}{2^x}$ *est décroissante pour* $x \geq 2$. *Donc le serveur a intérêt à refuser le nouvel arrivant.*

3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe.*
   (a) *Une récurrence avec utilisation du barycentre partiel donne le résultat (c'est du cours).*
   (b) *Une application directe du théorème de transfert permet de conclure.*

4. *Si* G_k *est l'évènement le joueur* k *gagne et* Y *le nombre de gagnants différents de* k, *on a*
   $\mathbb{P}(X_k = n/r) = \mathbb{P}(Y = r - 1 \cap G_k) \overset{\text{indépendants}}{=} \mathbb{P}(Y = r-1)\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{2} \times \binom{n-1}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, *car* Y *suit une loi binomiale de paramêtre* $n - 1$ *et* $1/2$.

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \sum_{r=1}^{n} \frac{n^2}{r^2}\binom{n-1}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n^2}{2}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(1+r)^2}\binom{n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

   La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ *est convexe et soit* U *une loi binomiale de paramêtres* $n - 1$ *et* $\frac{1}{2}$. *La question précédente donne*

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{n^2}{2}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(1+r)^2}\binom{n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n^2}{2} \times \mathbb{E}(g(U)) \geq \frac{n^2}{2} \times g(\mathbb{E}(U))$$

$$= \frac{n^2}{2} \times \frac{1}{\left((n-1) \times \frac{1}{2} + 1\right)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$