Corrigé de la colle n° 15

Variables aléatoires

23 janvier 2025

Exercice 1 (Loi géométrique & continuité décroissante)**.** Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce de monnaie qui tombe sur *pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient *pile* gagne le jeu. C'est A qui commence à jouer.

1. Quelle est la probabilité que A gagne ? Quelle est la probabilité que B gagne ? L'un des deux joueurs a-t-il plus de chances de gagner que l'autre ?
2. Calculer (de deux manières ?) la probabilité que le jeu ne s'arrête pas. Au quantième lancer peut-on espérer avoir un gagnant ?

---

1. Soit T le temps d'attente du premier *pile*. La variable aléatoire T suit une loi géométrique de paramètre p car les lancers forment une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T = k) = q^{k-1} \cdot p, \text{ où } q = 1 - p$$

   - L'événement A_n « le joueur A gagne à son n-ième lancer » est égal à $(T = 2n - 1)$ car le joueur A commence puis joue une fois sur deux. D'où
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(A_n) = q^{2n-2} \cdot p.$$
   L'événement « le joueur A gagne » est égal à $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et cette union est disjointe, donc la probabilité que le joueur A gagne est
   $$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-2} \cdot p = p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{2-p}.$$
   - L'événement B_n « le joueur B gagne à son n-ième lancer » est égal à $(T = 2n)$ car le joueur A commence puis B joue une fois sur deux. D'où
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(B_n) = q^{2n-1} \cdot p.$$
   L'événement « le joueur B gagne » est égal à $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ et cette union est disjointe, donc la probabilité que le joueur B gagne est
   $$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} \cdot p = pq \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$
   - Le joueur A a plus de chances de gagner que le joueur B car
   $$\frac{1}{2-p} > \frac{1-p}{2-p}.$$

2. L'événement « le jeu ne s'arrête pas » est le contraire de $A \cup B$. Or cette union est disjointe, d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{1}{2-p} + \dfrac{1-p}{2-p} = 1$. Donc la probabilité que le jeu ne s'arrête pas est nulle. Cet événement est donc presque impossible.

   <u>Autre méthode :</u> l'événement « le jeu ne s'arrête pas » est égal à « la pièce tombe toujours sur *face* », donc égal à $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, où F_n est l'événement « la pièce tombe les n premières fois sur *face* ». Or la suite (F_n) est décroissante car $F_{n+1} \subset F_n$. D'où (théorème de la continuité décroissante) : $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} P(F_n) = 0$ car $P(F_n) = q^n$ et $|q| < 1$.

   La variable aléatoire T suit la loi $\mathcal{G}(p)$, elle possède donc une espérance finie et $E(T) = \frac{1}{p}$.

Exercice 2. Ils sont n joueurs ($n > 2$) à jouer une partie à pile ou face en jetant chacun une pièce. L'un d'entre eux gagne la partie si sa pièce donne un résultat différent des $n-1$ autres. On joue jusqu'à ce qu'apparaisse le premier gagnant ; soit X le nombre de parties alors jouées. Calculer, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = k)$. Étudier l'espérance et la variance de X.

---

1. Les n joueurs obtiennent pile ou face : l'univers est $\Omega = \{pile; face\}^n$ et le nombre de résultats possibles est $\text{card}(\Omega) = 2^n$.
   Une partie est gagnée *SSI* un joueur obtient pile et tous les autres face (n résultats favorables) ou bien si un joueur obtient face et tous les autres pile (n résultats favorables). Il y a donc $2n$ résultats favorables.
   Chaque résultat est équiprobable, donc la probabilité qu'une partie soit gagnée (=un succès) est
   $$p = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$
2. Les parties sont des épreuves de Bernoulli indépendantes et la variable aléatoire X est le temps d'attente d'un succès, elle suit donc une loi géométrique de paramètre p :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}, \quad \text{où} \quad p = \frac{n}{2^{n-1}}.$$
3. La variable aléatoire suit une loi géométrique, elle possède donc une espérance et une variance. L'espérance est $E(X) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{2^{n-1}}{n}$ et la variance $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{2^{n-1}}{n} \cdot \left(\dfrac{2^{n-1}}{n} - 1\right)$.

Exercice 3 (Oral Mines Ponts PSI 2016)**.** Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables. On effectue une suite de tirages, avec remise, d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

1. Montrer que la suite $(P(X \geqslant n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2.
   En déduire la loi de X.
2. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

---

1. (a) On note B_n l'événement « on tire une boule blanche au n-ème tirage ».
   Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(X \geqslant n)$ est l'événement « il n'y a pas eu 2 boules noires consécutives au cours des $n-1$ premiers tirages ». D'où $P(X \geqslant 1) = P(X \geqslant 2) = 1$.

   (b) Établissons la relation de récurrence.
   Première méthode — (On procède comme dans le DS n° 4, *i.e.* on conditionne par les premiers tirages, ce qui remet le compteur à zéro.) Pour tout $n \geq 3$,
   $$(X \geqslant n) = ((X \geqslant n) \cap B_1) \bigcup \left((X \geqslant n) \cap \overline{B_1}\right),$$
   et cette union est disjointe, donc les probabilités s'ajouteront.
   D'une part, $P\left((X \geqslant n) \cap B_1\right) = P(B_1) \cdot P(X \geqslant n \mid B_0) = \frac{2}{3} \cdot P(X \geqslant n-1)$ car on sait que la première boule tirée est blanche, ce qui remet le compteur à zéro.
   D'autre part, $(X \geqslant n) \cap \overline{B_1} = \left[(X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right] \bigcup \left[(X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap B_2\right] = (X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap B_2$ car le premier événement de l'union est impossible. Enfin $P((X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1} \cap B_2) \cdot P(X \geqslant n \mid \overline{B_1} \cap B_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} \cdot P(X \geq n-2)$ car on sait que la deuxième boule tirée est blanche, ce qui remet le compteur à zéro. Donc
   $$P(X \geqslant n) = \frac{2}{3} P(X \geqslant n-1) + \frac{2}{9} P(X \geqslant n-2).$$
   Seconde méthode — Pour tout $n \geqslant 3$,
   $$(X \geqslant n) = ((X \geqslant n) \cap B_{n-1}) \bigcup \left((X \geqslant n) \cap \overline{B_{n-1}}\right),$$
   et cette union est disjointe, donc les probabilités s'ajouteront. De plus $(X \geqslant n) \cap B_{n-1} = (X \geqslant n-1) \cap B_{n-1}$, et $(X \geqslant n) \cap \overline{B_{n-1}} = (X \geqslant n-2) \cap B_{n-2} \cap \overline{B_{n-1}}$, d'où, par indépendance des tirages successifs,
   $$P(X \geqslant n) = \frac{2}{3} P(X \geqslant n-1) + \frac{2}{9} P(X \geqslant n-2).$$

(c) L'équation caractéristique $r^2 = \frac{2}{3}r + \frac{2}{9}$ de la relation de récurrence ci-dessus a pour solutions $\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}$, donc

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P(X\geqslant n)=\alpha\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n+\beta\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n,$$

et $\alpha(\frac{1-\sqrt{3}}{3})+\beta(\frac{1+\sqrt{3}}{3}) = P(X\geqslant 1) = 1$, et $\alpha(\frac{1-\sqrt{3}}{3})^2+\beta(\frac{1+\sqrt{3}}{3})^2 = P(X\geqslant 2) = 1$, *id est* après calculs $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ et $\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

(d) $X(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(X\geqslant n) = (X=n)\cup(X\geqslant n+1)$. Cette union étant disjointe, la loi de X est donnée par :

$$\forall n\in X(\Omega),\quad P(X=n)=P(X\geqslant n)-P(X\geqslant n+1)=\cdots=\frac{3+\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n+\frac{3-\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n,$$

cette formule étant encore valable pour $n=1$.

2. La v.a. X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est d'espérance finie *SSI* la série $\sum P(X\geqslant n)$ converge, auquel cas $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X\geqslant n)$.

Or on vérifie que $|\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}| < 1$, donc les séries géométriques $\sum(\frac{1\pm\sqrt{3}}{3})^n$ convergent. Ainsi la série $\sum P(X\geqslant n)$ est convergente car c'est une superposition (=une combinaison linéaire) de deux séries convergentes. Et

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\frac{3-\sqrt{3}}{4}\,\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}}+\frac{3+\sqrt{3}}{4}\,\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}}=\cdots=12.$$