Corrigé du Kdo du 24/01/2025

Variables aléatoires

Exercice 1 (tiré de CCP Maths PC 2015)**.**

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire S_n qui suit une loi de Poisson de paramètre n : $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbf{P}(X = k) = e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau des variations de la fonction f_n.

b) Déterminer un équivalent de $f_n(n)$ quand n tend vers ∞.

2) **a)** Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance de la variable aléatoire S_n et déterminer celles de la variable aléatoire $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ et en déduire que : $\mathbf{E}\left(|S_n - n|\right) = 2e^{-n}\dfrac{n^{n+1}}{n!}$.

c) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(|S_n^*|\right)$.

3) **a)** Rappeler l'hypothèse et l'expression du reste $R_n(a,b)$ de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + R_n(a,b)$$

pour une fonction f sur un intervalle $[a,b]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

c) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n.

a) Montrer que la fonction $\mathbf{G}_{S_n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

c) Étudier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*})$.

1) **a)** Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geq 0$, $f_n'(t) = \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{n!}(n-t)$.

t	0		n		$+\infty$
$f_n'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f_n(t)$	0	$\nearrow$	$f_n(n) = \dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$	$\searrow$	0

b) Grâce à la formule de Stirling, $f_n(n) \sim \dfrac{e^{-n}n^n}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}$ et, en simplifiant, $f_n(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

2) **a)** $E(S_n) = V(S_n) = n$. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n^*) = \frac{E(S_n)-n}{\sqrt{n}} = 0$. Et $V(S_n^*) = \frac{V(S_n)}{\sqrt{n}^2} = 1$.

b) On calcule la somme $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}$ grâce à un télescope :

$K = ne^{-n}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\right) = ne^{-n}\frac{n^n}{n!}$.

$$\mathbf{E}(|S_n-n|) = \sum_{k=0}^{\infty}|k-n|e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)e^{-n}\frac{n^k}{k!} = K+L,$$

Or $L-K = E(S_n - n) = 0$, d'où $K = L$, donc

$$E(|S_n-n|) = 2K = 2e^{-n}\frac{n^{n+1}}{n!}.$$

c) $E(|S_n^*|) = \frac{1}{\sqrt{n}}E(|S_n-n|) = 2\sqrt{n}f_n(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ d'après la question 1b. Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|S_n^*|) = \sqrt{2/\pi}$.

3) **a)** Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,b]$, alors la formule de Taylor est vérifiée avec $R_n(a,b) = \displaystyle\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $(S_n^* \leq 0) = (S_n \leq n) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}(S_n = k)$ et cette union est disjointe, d'où $P(S_n^* \leq 0) = P(S_n \leq n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(S_n = k)$, donc : $P(S_n^* \leq 0) = e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f = \exp$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b] = [0,n]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f$ et $f(0) = 1$ donc $e^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + R_n(0,n)$, où $R_n(0,n) = \displaystyle\int_0^n e^t\frac{(n-t)^n}{n!}dt = \int_0^n \frac{e^{n-u}u^n}{n!}du$ (par le changement de variable $u = n-t$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$).

On multiplie l'égalité obtenue par e^{-n} : $1 = e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!}dt$. D'où

$$P(S_n^* \leq 0) = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt.$$

c) Par suite :

$$\begin{aligned} P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) &= \int_0^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt \\ &= \int_0^n e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on pose $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $u'(t) = \dfrac{t^n}{n!}$, $v'(t) = e^{-t}$. D'où, en intégrant par parties :

$$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d) $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)dt - f_{n+1}(n)$ et la fonction f_{n+1} est croissante sur $[n;n+1]$ d'après la question 1a. Donc, pour tout $t \in [n;n+1]$, $f_{n+1}(t) \geq f_{n+1}(n)$ et, en intégrant sur $[n;n+1]$: $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) \geq 0$. La suite $(P(S_n^* \leq 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Par ailleurs, elle est minorée par 0 (car toute probabilité est positive), donc elle converge.

4) **a)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$: la série $\sum \dfrac{(nt)^k}{k!}$ converge et sa somme vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!} = e^{nt}$. D'où $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-n} \frac{(nt)^k}{k!}$ est défini et vaut

$$G_{S_n}(t) = e^{n(t-1)}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{G}_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = k) t^k = \mathbf{E}(t^{S_n})$ d'après le théorème de transfert.

Or $t^{S_n^*} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n - n} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n} \times t^{-\sqrt{n}}$. D'où, par linéarité de l'espérance, $t^{S_n^*}$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

c) D'après les deux questions précédentes, $\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \dfrac{\exp\left(n(t^{1/\sqrt{n}} - 1)\right)}{t^{\sqrt{n}}}$.

$e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon(u)$, où $\varepsilon(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0. D'où $t^{1/\sqrt{n}} = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ln t\right) = 1 + \dfrac{\ln t}{\sqrt{n}} + \dfrac{(\ln t)^2}{2n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon_n$, où ε_n tend vers 0 quand n tend vers ∞. D'où $n(t^{1/\sqrt{n}} - 1) = \sqrt{n} \ln t + \dfrac{(\ln t)^2}{2} + \varepsilon_n$. Donc $\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \exp\left[\dfrac{(\ln t)^2}{2} + \varepsilon_n\right]$.

Par continuité de la fonction exponentielle, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \exp\left(\frac{(\ln t)^2}{2}\right)$.

Exercice 2 (tiré de CCP Maths 1 MP 2015)**.**

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n un entier naturel non nul et x un réel de $[0,1]$. On pose le polynôme :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, x)$. Montrer que :

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k).$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(u, v) \in [0,1]^2$:

$$|v - u| < \alpha \implies |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

Soit un tel α. On note désormais I_α et J_α les parties de $[\![0, n]\!]$ définies par :

$$k \in I_\alpha \iff \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha \qquad \text{et} \qquad k \in J_\alpha \iff \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha.$$

3) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k \in J_\alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{P}(S_n = k) \leq \varepsilon.$

4) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k \in I_\alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{P}(S_n = k) \leq 2\|f\|_\infty \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right).$

5) Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance $\mathbf{V}(S_n)$ de la variable aléatoire S_n.

6) Prouver que : $\mathbf{P}(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.

7) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1], \quad |B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$

8) Conclure.

1) La variable aléatoire S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$, d'où $S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in S_n(\Omega),\ \mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
D'une part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x)\mathbf{P}(S_n = k) = f(x)\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_n = k) = f(x)$ car $\displaystyle\sum_{k\in S_n(\Omega)} \mathbf{P}(S_n = k) = 1$.
D'autre part, $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}(S_n = k)$. Donc $B_n(x) - f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathbf{P}(S_n = k)$.

2) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est donc uniformément continue d'après le théorème de Heine.

3) Pour tout $k \in J_\alpha$, $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha$ d'où $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$, d'où $\displaystyle\sum_{k\in J_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbf{P}(S_n = k) \leq \sum_{k\in J_\alpha}\varepsilon\mathbf{P}(S_n = k) = \varepsilon\sum_{k\in J_\alpha}\mathbf{P}(S_n = k) \leq \varepsilon\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\mathbf{P}(S_n = k) = \varepsilon$. Donc $\displaystyle\sum_{k\in J_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbf{P}(S_n = k) \leq \varepsilon$.

4) Pour tout $k \in I_\alpha$, d'après l'inégalité triangulaire, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ car $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$. D'où $\displaystyle\sum_{k\in I_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbf{P}(S_n = k) \leq 2\|f\|_\infty\sum_{k\in I_\alpha}\mathbf{P}(S_n = k) = 2\,\|f\|_\infty\,\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)$ car l'événement $\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)$ est égal à $\displaystyle\bigcup_{k\in I_\alpha}(S_n = k)$ et cette union est disjointe. Donc $\displaystyle\sum_{k\in I_\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbf{P}(S_n = k) \leq 2\,\|f\|_\infty\,\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)$.

5) $\mathbf{E}(S_n) = nx$ et $\mathbf{V}(S_n) = nx(1-x)$.

6) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq a) \leq \dfrac{\mathbf{V}(S_n)}{a^2}$ pour tout réel $a > 0$ car la variable aléatoire S_n^2 est d'espérance finie. En particulier, si $a = n\alpha$ qui est bien strictement positif, alors $\mathbf{P}(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \dfrac{nx(1-x)}{(n\alpha)^2} \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}$ car $\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{4} - x(1-x) = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$.

7) D'après la question 1 et par l'inégalité triangulaire, $|B_n(x) - f(x)| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|\mathbf{P}(S_n = k)$. Parce que $[\![0,n]\!]$ est l'union disjointe de I_α et de J_α, la dernière somme est la somme des deux sommes majorées aux questions 4 et 3. D'où

$$|B_n(x) - f(x)| \leq 2\,\|f\|_\infty\,\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right) + \varepsilon \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \varepsilon$$

d'après la question précédente car les événements $\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right)$ et $(|S_n - nx| \geq n\alpha)$ sont égaux.
Quantifions : d'après la question 2, le réel α dépend de ε mais ne dépend ni de n ni de x. D'où

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1], \quad |B_n(x) - f(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \varepsilon.$$

Or $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \leq \varepsilon$. Donc

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1], \quad |B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

8) On en déduit que $\sup\limits_{x\in[0,1]}|B_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: la suite des fonctions polynomiales B_n converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0,1]$. En exhibant une telle suite de polynômes, on a prouvé le théorème d'approximation de Weierstrass : toute fonction continue sur le segment $[0,1]$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
La preuve est due à Sergueï Bernstein et figure dans un article intitulé « *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités* » et paru en 1912 :

Figure 1 – QR-Bernstein