## Exercice 1 - Bureau de poste (⋆⋆)

Dans un bureau de poste il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité de $p \in ]0,1[$, ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1-p$, et chaque personne effectue son choix de façon indépendante. De plus on sait que le nombre $X$ de personne arrivant au bureau en 1 heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. On note respectivement $Y$ et $Z$ les variables aléatoires correspondant aux nombres de personnes choisissant, respectivement, le premier guichet et le deuxième guichet.

1. Exprimer la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

Soit $i, n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}\Big(\{Y=i\} \cap \{X=n\}\Big) = \mathbb{P}(X=n) \times \mathbb{P}(Y=i|X=n)$$

Or d'après l'énoncé lorsque $n$ personne rentre dans le bureau de poste il y a donc $n$ choix indépendants, pour lesquels $Y$ compte les succès avec une probabilité $p$. Dès lors $\mathbb{P}(Y=i|X=n) \rightsquigarrow \mathcal{B}(i,n)$, ainsi :

$$\mathbb{P}(Y=i|X=n) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors on en déduit que :

$$\mathbb{P}\Big(\{Y=i\} \cap \{X=n\}\Big) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En déduire la loi de $Y$, puis celle de $Z$.

Par sommation on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=i) &= \sum_{n=i}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\{Y=i\} \cap \{X=n\}\Big) \\
&= \sum_{n=i}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \\
&= e^{-\lambda} \times \frac{p^i}{q^i} \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} q^n \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \left(\frac{p}{q}\right)^i \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{(n-i)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \left(\frac{p}{q}\right)^i (\lambda q)^i \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} \left(\frac{p}{q}\right)^i (\lambda q)^i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} (\lambda p)^i e^{\lambda q} \\
&= e^{\lambda(1-p-1)} \frac{(\lambda p)^i}{i!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}
\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. De même on trouve $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.

3. $Y$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?

D'une part on a pour $i, j \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=i) \times \mathbb{P}(Z=j) &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \times e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!} p^i q^j\end{aligned}$$

D'autre part, comme $X = Y + Z$ on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big( \{Y=i\} \cap \{Z=j\} \Big) &= \mathbb{P}\Big( \{Y=i\} \cap \{X-Y=j\} \Big) \\ &= \mathbb{P}\Big( \{Y=i\} \cap \{X=i+j\} \Big) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \binom{i+j}{i} p^i q^j \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!} p^i q^j\end{aligned}$$

D'où l'indépendance.

---

## Exercice 2 - Somme de deux dés truqués $(\star\star)$

1. Démontrer que toutes les racines complexes non-nulles du polynôme $P(X) = X^2 + X^3 + \cdots + X^{12}$ sont simples.

En factorisant $P$ par $X^2$ on trouve :

$$P(X) = X^2 \left(1 + X + \cdots + X^{10}\right)$$

Or les racines non-nulles de ce polynômes sont les racines 11-ième de l'unité or mis 1, elles sont donc toutes simples.

2. Peut-on truquer un dé de sorte qu'en le lançant deux fois de suite, la somme obtenus suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$ ?

Notons $p_i$ la probabilité d'obtenir $i \in [\![1, 6]\!]$, puis $X_j$ la variable aléatoire correspondant au résultat du $j$-ième lancer pour $j \in \{1, 2\}$. Les fonctions génératrices des $X_j$ sont égales et valent :

$$G_{X_j}(t) = \sum_{i=1}^{6} p_i t^i$$

Comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, la fonction génératrice de leur somme $S = X_1 + X_2$ est obtenu par produit à savoir :

$$G_S(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^2$$

Ainsi $G_S$ est un polynôme dont toutes les racines sont de multiplicités paire, Or si $S$ suivait la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$ on aurait :

$$G_S(t) = \frac{1}{11} \left(t^2 + t^3 + \cdots + t^{12}\right)$$

Mais d'après la question précédente ce polynôme n'admet que des racines simples (or mis 0), ce qui est absurde. On en déduit que $S$ ne peut pas suivre la loi uniforme.

---

## Exercice 3 - Donnée par une contrainte $(\star\star)$

Soit $X$ une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $p \in ]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p\mathbb{P}(X \geq n)$. Déterminer la loi de $X$.

Notons pour simplifier $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ on a alors :

$$p_1 = p \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n = p$$

Pour $n = 2$ on trouve :

$$p_2 = p \sum_{n \geq 2} p_n = p \left( \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n - p_1 \right) = p\,(1-p)$$

On pose donc $P_n$ : $p_n = p\,(1-p)^{n-1}$. D'après ce qui précède la résultat est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P_k$ vrai pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a alors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p \sum_{k \geq n+1} p_k \\ &= p \left( 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k \right) \\ &= p \left( 1 - \sum_{k=1}^{n} p\,(1-p)^{k-1} \right) \\ &= p \left( 1 - p \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \right) \\ &= p\,(1-p)^n \end{aligned}$$

D'où l'hérédité. Par principe de récurrence on en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathbb{P}(X = n) = p\,(1-p)^{n-1}$, et on reconnaît alors une loi géométrique de paramètre $p$, d'où $X \rightsquigarrow G(p)$

---

## Exercice 4 - Diagonalisable ? $(\star\star\star)$

On considère $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$$

Quelle est la probabilité que $A$ soit diagonalisable ?

On a $\mathrm{Sp}(A) = \{X_1, X_2\}$, ainsi dans le cas $X_1 \neq X_2$ on peut affirmer que $A$ est diagonalisable. Sinon $X_1$ est l'unique valeur propre de $A$ et en résolvant $AX = X_1 \times X$ on trouve $y = 0$ avec $X = (x, y)$. Ainsi l'espace propre de $A$ associé à $X_1$ est de dimension au plus 1, et on en déduit que $A$ n'est pas diagonalisable.

Finalement la probabilité que $A$ soit diagonalisable est $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$, or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 0}\Big[(X_1 = k)\cap(X_2 = k)\Big]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\Big((X_1 = k)\cap(X_2 = k)\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_1 = k)\,\mathbb{P}(X_2 = k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\right)^2\\
&= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2
\end{aligned}$$

Où l'on a utilisé l'indépendance lors de la seconde égalité. Il faut encore que l'on calcul la dernière somme, or en développant $(X+1)^{2n} = (X+1)^n \times (X+1)^n$ et en identifiant le coefficient devant $X^n$ on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Ainsi la probabilité recherchée est alors :

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1 - \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 - \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}$$

---

## Exercice 5 - Théorème de Weierstrass (⋆⋆⋆)

Lobjectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Weierstrass, à savoir le fait que l'espace de fonctions polynômiales est dense dans l'espace des fonctions continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour cela on considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, ainsi que la suite de polynôme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Enfin pour $x \in [0,1]$ on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $x$ et on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de $S_n$ puis $\mathbb{P}\big(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\big)$ et enfin $E\big(f\big(\frac{S_n}{n}\big)\big)$.

$S_n$ est la somme de variables aléatoires suivant une loi de Bernouilli, ainsi on peut affirmer que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$, dès lors on en déduit la loi de $\frac{S_n}{n}$ à savoir :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

De plus, comme $f$ est continue on peut appliquer le théorème de transfert afin d'évaluer $E\big(f\big(\frac{S_n}{n}\big)\big)$ :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_n(x)$$

2. Soit $\varepsilon > 0$, on souhaite majorer, sans condition sur $x$, l'expression $|B_n(x) - f(x)|$.

2.a. Justifier l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ on ai :

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Il s'agit simplement du théorème de Heine, en effet comme $f$ est continue sur le compact $[0, 1]$ elle est en faite uniformément continue. D'où le résultat.

2.b. En remarquant que l'on peut écrire :

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| = \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta} + \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}$$

Majorer $\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right|$ indépendamment de $x$.

Dans l'écriture :

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| = \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta} + \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}$$

On remarque que le premier terme est toujours inférieur ou égale à $\varepsilon$ par uniforme continuité de $f$. De plus, par linéarité de l'espérance, et comme $f(x)$ est une variable aléatoire constante, on a :

$$\begin{aligned}
\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| &= \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\
&\leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \\
&\leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta} + \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}\right) \\
&\leq E\left(\varepsilon + \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}\right) \\
&\leq \varepsilon + E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}\right) \\
&\leq \varepsilon + E\left(2\, \|f\|_\infty \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}\right) \\
&\leq \varepsilon + 2\, \|f\|_\infty E\left(\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}\right)
\end{aligned}$$

Or l'espérance d'une indicatrice d'un évènement est égale à la probabilité de cet évènement (il suffit de revenir à la définition de l'espérance au cas où). Ainsi on a :

$$E\left(\mathbb{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right)$$

De sorte que l'on peut alors écrire :

$$|B_n(x) - f(x)| = \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon + 2\, \|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right)$$

On utilise alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour obtenir :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\geq\delta\right)\leq\frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2}$$
$$\leq\frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2}$$
$$\leq\frac{nx\,(1-x)}{n^2\delta^2}$$
$$\leq\frac{x\,(1-x)}{n\delta^2}$$

Or $x\in[0,1]$ donc $x\,(1-x)\leq 1$ de sorte que l'on obtient finalement :

$$|B_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon+\frac{2\,\|f\|_\infty}{n\delta^2}$$

3. En déduire le théorème de Weierstrass.

Il ne reste plus qu'à choisir $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$ on ai :

$$\frac{2\,\|f\|_\infty}{n\delta^2}\leq\varepsilon$$

Autrement dit pour $n$ assez grand, indépendamment de $x$, on a :

$$|B_n(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon$$

La borne supérieure étant le plus petit des majorants on peut donc affirmer que pour $n$ assez grand :

$$\|B_n-f\|_\infty\leq 2\varepsilon$$

Ceci démontrant bien que la suite de polynôme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$.

---

## Exercice 6 - Série Génératrice $(\star\star)$

Soit $X$ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, et de loi de probabilité $\mathbb{P}(X=n)=p_n$ pour tout entier $n$. La fonction génératrice de $X$, notée $G_X$, est alors définie par $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}p_nt^n$.

1. Prouver que $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de $G_X$.

Comme $X$ est une VA, sa loi est une loi de probabilité, en particulier la série $\sum p_n=1$ on en déduit que la série entière définissant $G_X$ est de rayon de convergence supérieure ou égale à 1. En particulier $]-1,1($ est bien inclus dans l'ensemble de définition de $G_X$.

2. Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendants à valeur dans $\mathbb{N}$. On pose $S=X_1+X_2$. Démontrer que $\forall t\in\,]-1,1[\,,\ G_S(t)=G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t)$ :

   2.a. En utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

Notons $R_1$ le rayon de convergence de $G_{X_1}$, ainsi que $R_2$ celui de la série définissant $G_{X_2}$, puis $R$ le rayon de convergence de la sérié entière produit $\sum c_nt^n$ où :

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_1=k)\times\mathbb{P}(X_2=n-k)$$

On sait d'après le cours que $R\geq\min(R_1,R_2)$, mais d'après la question précédente on sait que $R_1\geq 1$ et $R_2\geq 1$ d'où $R\geq 1$. Dès lors par produit de Cauchy on a l'égalité :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n)\, t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = n)\, t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = n-k)\right) t^n$$

De plus pour $n \in \mathbb{N}$ on a les égalité d'évènements suivants :

$$(S = n) = (X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^{n} \Big[ (X_1 = k) \cap (X_2 = n-k) \Big]$$

Comme la dernière écrite est une union disjointe d'évènements on obtient la formule :

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = n-k)$$

Ainsi d'après ce qui précède on a l'égalité :

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[,\ G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = n)\, t^n = G_S(t)$$

D'où le résultat.

2.b. En utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E\big[t^X\big]$.

Soit $t \in \left]-1, 1\right[$ d'après la première question, les variables aléatoires $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$ admettent une espérance. Comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, il en est de même pour $t^{X_1}$ et $t^{X_2}$, dès lors on a :

$$E\big[t^{X_1+X_2}\big] = E\big[t^{X_1} \times t^{X_2}\big] = E\big[t^{X_1}\big] \times E\big[t^{X_2}\big]$$

L'égalité précédente se traduit par $G_S(t) = G_{X_1}(t)\, G_{X_2}(t)$

3. Dans cette question on admet que le résultat précédent est vrai également pour $n$ variables aléatoires indépendants à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue $n$ tirage successifs, avec ,remise, d'une boule du sac. On note alors $S_n$ la somme des numéros tirés. Pour $t \in \left]-1, 1\right[$ déterminer la valeur de $G_{S_n}(t)$.

On note $X_i$ la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du $i$-ième tirage. De sorte que l'on peut écrire $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les tirages étant effectués avec remise, il est pertinent de supposé les $X_i$ indépendantes, et donc d'après le résultat précédent on a :

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$$

De plus on remarque que les $X_i$ ont la même loi, à savoir $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{4}$. Comme on sait que la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $\forall i \in \mathbb{N},\ G_{X_i} = G_{X_1}$. Enfin à l'aide des valeurs de la loi on trouve :

$$G_{X_1}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}\,(t+1)^2$$

Ainsi on obtient une expression de $G_S$ à savoir :

$$G_S(t) = \frac{1}{4^n}\,(t+1)^{2n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{2n} t^k$$

Comme par définition $G_S(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k)\, t^k$ par unicité du développement en série entière on en déduit que $S$ est à valeur dans $[\![0, 2n]\!]$ et de plus on a :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ \mathbb{P}(S = k) = \binom{k}{2n} \frac{1}{4^n} = \binom{k}{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

On reconnaît alors la série génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on peut affirmer que $S$ suit une telle loi binomiale.

---

## Exercice 7 - Nombre moyen de cycles (⋆⋆⋆)

Soit $n \geq 1$ et $\sigma_n$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$n on note de plus $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de cycles dans la décomposition de $\sigma_n$ en produit de cycles à supports disjoints (en comptant les cycles réduit à un singleton, par exemple l'identité possède alors $n$ cycles).

1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on note $c_{n,k}$ le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui ont exactement $k$ cycles dans leur décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1,\ \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + n c_{n,k}$$

Il suffit de comprendre comment on procède pour obtenir une permutation $\tau$ sur $n+1$ éléments à $k$ cycles. Pour cela intéressons nous à l'image de $n+1$ :

— Si $\tau(n+1) = n+1$ alors dans ce cas le cycle dans lequel se trouve $n+1$ est réduit à un singleton, et l'on peut choisir n'importe quelle permutation de $\mathfrak{S}_n$ qui possède $k-1$ cycles dans sa décomposition.

— Sinon $\tau(n+1) = j \in [\![1, n]\!]$, et dans ce cas il y a $n$ choix possible pour la valeur de $j$, tout se passe alors comme si on avait $n+1$ à gauche de $j$ dans la décomposition d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ à $k$ cycles.

Finalement on trouve bien la formule demandé à savoir :

$$c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + n c_{n,k}$$

2. En déduire une relation entre les fonctions génératrices $G_{X_{n+1}}$ et $G_{X_n}$.

Comme $\sigma_n$ suit une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ on en déduit que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{c_{n,k}}{n!}$. Dès lors on a :

$$
\begin{aligned}
G_{X_{n+1}}(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n+1,k}}{(n+1)!} t^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n,k-1} + n c_{n,k}}{(n+1)!} t^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n,k-1}}{(n+1)!} t^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n c_{n,k}}{(n+1)!} t^k \\
&= c_{n,0} t + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{c_{n,k-1}}{(n+1)!} t^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{n c_{n,k}}{(n+1)!} t^k + \frac{n c_{n,n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{n,k-1}}{(n+1)!} t^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{n c_{n,k}}{(n+1)!} t^k \\
&= \frac{t+n}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{n,k}}{n!} t^k \\
&= \frac{t+n}{(n+1)!} G_{X_n}(t)
\end{aligned}
$$

3. En déduire l'expression de $G_{X_n}$, puis l'espérance de $X_n$ dont on donnera un équivalent.

Á l'aide de la question précédente, on démontre par récurrence immédiate que l'on a l'expression suivante :

$$G_{X_n}(t) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t+k)$$

On dérive alors cette expression pour obtenir :

$$G'_{X_n}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{t+i} \prod_{k=0}^{n-1} (t+k)$$

Enfin à l'aide du résultat du cours on obtient l'espérance de $X_n$ en évaluant l'expression précédente pour $t = 1$ soit :

$$\mathbb{E}[X_n] = G'_{X_n}(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

En particulier on a $\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

---

## Exercice 8 - Une certaine variable aléatoire $(\star\star)$

Soit $p \in ]0,1[$, on dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité $p$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir "pile" deux fois. Soit $X$ le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de $X$.

L'événement $X = n$ correspond au déroulement suivant : On a obtenu un et un seul pile lors de $n+1$ premiers tirages, et le $n+2$-ième tirage donne un pile. Il y a donc $n+1$ choix dans la position du premier pile, et l'événement élémentaire admet pour probabilité $p^2 (1-p)^n$ on en déduit :

$$\mathbb{P}(X = n) = (n+1)\, p^2\, (1-p)^n$$

2. Montrer que $X$ admet une espérance, et la calculer.

Comme $0 < |p| < 1$ on a $n\,(n+1)\,p^2\,(1-p)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ainsi la série définissant $\mathbb{E}[X]$ est absolument convergente. De plus on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,(n+1)\,p^2\,(1-p)^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,(n-1)\,p^2\,(1-p)^n + 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^2\,(1-p)^n \\
&= p^2\Big[(1-p)\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,(n-1)\,(1-p)^{n-2} + 2\,(1-p)\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\,(1-p)^{n-1}\Big] \\
&= p^2\Big[(1-p)^2\,\frac{2}{(1-(1-p))^3} + (1-p)\,\frac{1}{(1-(1-p))^2}\Big] \\
&= \frac{2\,(1-p)^2}{p} + \frac{2p\,(1-p)}{p} \\
&= \frac{2\,(1-p)}{p}
\end{aligned}$$

On procède à présent à l'expérience suivante : Si $X$ prend la valeur $n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à $n$ dans une urne. On effectue ensuite un tirage dans cette urne, et l'on note $Y$ le numéro de la boule obtenu. Enfin on pose aussi $Z = X - Y$.

3. Déterminer la loi de $Y$ et calculer son espérance.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, n]\!]$, comme on suppose le tirage uniforme on a :

$$\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \frac{1}{n+1}$$

Par la formule des probabilités totales on trouve alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k | X = n) \times \mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} p^2\,(1-p)^n \\
&= p^2\,(1-p)^k\,\frac{1}{1-(1-p)} = p\,(1-p)^k
\end{aligned}$$

On pourrais calculer directement l'espérance, mais de façon plus subtile on peut remarquer que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p$, dès lors on $\mathbb{E}[Y+1] = \frac{1}{p}$ puis par linéarité de l'espérance on trouve :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y+1] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

4. Donner la loi de $Z$ et montrer que $Z$ et $Y$ sont indépendantes.

On peut remarque que l'on a par la formule des probabilité totale :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=h) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j|X=h+j) \times \mathbb{P}(X=h+j) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} p^2 (1-p)^{h+j} \\
&= p^2 (1-p)^h \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= p (1-p)^h
\end{aligned}
$$

D'autre part on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z=h\} \cap \{Y=k\}) &= \mathbb{P}(\{X=h+j\} \cap \{Y=j\}) \\
&= \mathbb{P}(Y=j|X=h+j) \times \mathbb{P}(X=h+j) \\
&= p^2 (1-p)^{h+j} \\
&= \left(p (1-p)^h\right) \times \left(p (1-p)^j\right) \\
&= \mathbb{P}(Z=h) \times \mathbb{P}(Y=j)
\end{aligned}
$$

D'où l'indépendance.