Programme de la colle n° 16

Semaine du 27/01/2025

Espaces vectoriels normés ▷ chapitre XI & TD *n*° 11 :

— définition d'une norme et de la distance associée.

— normes 1, 2 et ∞ sur l'*ev* $\mathbb{K}^n$ et sur l'*ev* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, extension de la norme ∞ à l'*ev* des fonctions bornées sur un intervalle I ; lien entre norme ∞ sur un intervalle I d'une fonction et convergence uniforme sur I d'une suite de fonctions.

— équivalence des normes en dimension finie (admise).

— limite d'une suite de vecteurs convergente, unicité de la limite ; suites extraites, toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite ; si l'*evn* est de dimension finie, alors une suite de vecteurs u_n tend vers un vecteur ℓ *ssi* chaque coordonnée de u_n tend vers chaque coordonnée de ℓ.

— partie bornée, suite de vecteurs bornée, fonction bornée ; toute suite convergente est bornée.

— point adhérent à une partie d'un *evn*, adhérence d'une partie d'un *evn*, caractérisation séquentielle de l'adhérence ; densité d'une partie.

— limite d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition ; si l'*evn* d'arrivée de f est de dimension finie, alors $f(x)$ tend vers ℓ *ssi* chaque coordonnée de $f(x)$ tend vers chaque coordonnée de ℓ ; caractérisation séquentielle de la limite.

— continuité d'une fonction ; toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue (les réciproques sont fausses) ; toute norme est $1-$lipschitzienne.

— CNS pour qu'une application (multi-)linéaire soit continue ; si l'*evn* de départ d'une application f (multi-)linéaire est de dimension finie, alors f est continue.

— norme subordonnée d'une application linéaire continue (définitions et propriétés : c'est une norme sous-multiplicative).

— sphères, boules ouvertes et boules fermées, définition d'un point intérieur à une partie, d'une partie ouverte et d'une partie fermée d'un *evn* ; intersection d'un nombre fini et union d'ouverts, union d'un nombre fini et intersection de fermés ; caractérisation séquentielle d'un fermé.

— l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert, de même pour un fermé ; en particulier, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E, $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ sont des fermés de E.

(La compacité, la connexité par arcs et la convexité ne sont pas au programme de cette colle, les séries vectorielles non plus.)

À suivre : endomorphismes remarquables d'un espace euclidien