Corrigé de la feuille de T.D. n° 12

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

26 janvier 2025

Exercice 1. Soient un espace euclidien E et une application f de E vers E. On dit que f :

— conserve la distance si $\quad \forall (u,v)\in E^2,\quad \|f(u)-f(v)\| = \|u-v\|$;

— conserve le produit scalaire si $\quad \forall (u,v)\in E^2,\quad \langle f(u)|f(v)\rangle = \langle u|v\rangle$.

1. Montrer que f conserve le produit scalaire si, et seulement si, $f(0_E)=0_E$ et f conserve la distance.
2. Donner un exemple d'application f qui conserve la distance mais telle que $f(0_E)\neq 0_E$.

---

1. Si $f(0_E)=0_E$ et f conserve la distance, alors :

$$\begin{array}{rcl}
\langle f(u)|f(v)\rangle & = & \frac{1}{2}\left(\|f(u)\|^2+\|f(v)\|^2-\|f(u)-f(v)\|^2\right) \quad \text{(identité de polarisation)}\\
& = & \frac{1}{2}\left(\|f(u)-f(0_E)\|^2+\|f(v)-f(0_E)\|^2-\|f(u)-f(v)\|^2\right) \quad \text{car} \quad f(0_E)=0_E\\
& = & \frac{1}{2}\left(\|u-0_E\|^2+\|v-0_E\|^2-\|u-v\|^2\right) \quad \text{car} \quad \text{f conserve la distance}\\
& = & \frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2-\|u-v\|^2\right)\\
& = & \langle u|v\rangle \quad \text{(identité de polarisation).}
\end{array}$$

Réciproquement, si f conserve le produit scalaire, alors : $\|f(0_E)\|^2=\langle f(0_E)|f(0_E)\rangle = \langle 0_E|0_E\rangle = 0$, d'où $f(0_E)=0_E$. Et

$$\begin{array}{rcl}
\|f(u)-f(v)\|^2 & = & \langle f(u)|f(u)\rangle + \langle f(v)|f(v)\rangle - 2\langle f(u)|f(v)\rangle\\
& = & \langle u|u\rangle + \langle v|v\rangle - 2\langle u|v\rangle \quad \text{car} \quad \text{f conserve le produit scalaire}\\
& = & \|u-v\|^2.
\end{array}$$

2. Soient a un vecteur non nul de E et f la translation de vecteur a, définie par : $\forall x\in E,\ f(x)=x+a$. Dune part $f(0_E)=a\neq 0_E$. D'autre part $\|f(u)-f(v)\|=\|u-v\|$ car $f(u)-f(v)=(u+a)-(v+a)=u-v$.

Exercice 2. Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.

1. Montrer que toute valeur propre réelle de u appartient à $\{-1;+1\}$.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u+\mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux.
3. Soient F et G deux *sev* de E. Montrer que : si $F\perp G$, alors $u(F)\perp u(G)$.
4. Soit F un *sev* de E. Montrer que $u(F^\perp) = (u(F))^\perp$.

---

1. Si $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur propre de u, alors il existe un vecteur non nul $x\in E$ tel que $u(x)=\lambda x$. D'où $\|u(x)\|=|\lambda|\,\|x\|$. Or u conserve la norme, d'où $\|u(x)\|=\|x\|$. Par suite $\|x\|=|\lambda|\,\|x\|$. En outre, $x\neq 0_E$, d'où $\|x\|\neq 0$, donc $|\lambda|=1$.
2. Si $x\in SEP(+1)$ et $y\in SEP(-1)$, alors $u(x)=x$ et $u(y)=-y$, d'où $\langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|-y\rangle = -\langle x|y\rangle$. Mais u conserve le produit scalaire, d'où $\langle u(x)|u(y)\rangle=\langle x|y\rangle$. On en déduit que $\langle x|y\rangle = 0$. Donc $SEP(+1)\perp SEP(-1)$.
3. Commençons par remarquer que $u(F)$ et $u(G)$ sont bien des *sev* car ce sont les images de *sev* par une application linéaire. Soient $x\in u(F)$ et $y\in u(G)$: on veut montrer que $x\perp y$.
   Il existe $x_0\in F$ et $y_0\in G$ tels que $x=u(x_0)$ et $y=u(y_0)$:

$$\begin{array}{rcl}
\langle x|y\rangle & = & \langle u(x_0)|u(y_0)\rangle\\
& = & \langle x_0|y_0\rangle \text{ car } u \text{ est une isométrie}\\
& = & 0 \text{ car } x_0\perp y_0 \text{ car } F\perp G.
\end{array}$$

   Donc $u(F)\perp u(G)$.

4. $F \perp F^{\perp}$, d'où (grâce à la question précédente) : $u(F^{\perp}) \perp u(F)$, ce qui équivaut à : $u(F^{\perp}) \subset (u(F))^{\perp}$.
Il reste à montrer l'autre inclusion et c'est une affaire de dimensions : d'une part, u est bijective, d'où $\dim u(F^{\perp}) = \dim F^{\perp}$ et $\dim u(F) = \dim F$. D'autre part, E est de dimension finie, d'où $\dim (u(F))^{\perp} = \dim E - \dim u(F)$ (car $u(F)$ et $u(F)^{\perp}$ sont supplémentaires) et $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$ (car F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires).
D'où $u(F^{\perp}) \subset (u(F))^{\perp}$ et ces deux *sev* ont même dimension, donc il sont égaux.

Exercice 3. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(u^*) = (\operatorname{Im} u)^{\perp} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u^*) = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}.$$

• On va prouver la propriété ♡ : $\operatorname{Ker}(u^*) = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ par double inclusion.

Montrons que $\operatorname{Ker}(u^*) \subset (\operatorname{Im} u)^{\perp}$: soient $x \in \operatorname{Ker}(u^*)$ et $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$, d'où

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, u(z) \rangle \\ &= \langle u^*(x), z \rangle \quad \text{par définiton de } u^* \\ &= 0 \quad \text{car } x \in \operatorname{Ker}(u^*). \end{aligned}$$

Montrons que $(\operatorname{Im} u)^{\perp} \subset \operatorname{Ker}(u^*)$: soit $y \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}$. Alors $\forall x \in E,\ \langle y, u(x) \rangle = 0$. Or $\langle y, u(x) \rangle = \langle u^*(y), x \rangle$ par définition de u^*. D'où : $\forall x \in E,\ \langle u^*(y), x \rangle = 0$. En particulier, $\langle u^*(y), u^*(y) \rangle = 0$. Donc $u^*(y) = 0_E$.

• On veut prouver que $\operatorname{Im}(u^*) = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Or ces *sev* sont de dimension finie (donc égaux à l'orthogonal de leur orthogonal).La propriété est donc équivalente à $\operatorname{Im}(u^*)^{\perp} = \operatorname{Ker} u$. Il suffit de remplacer u par u^* dans la propriété ♡ car $(u^*)^* = u$.

Exercice 4. Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée. (Revoir les deux méthodes de ▷ **l'exercice 14 du TD n° 4** et tenter une troisième méthode utilisant le théorème spectral.)

On remarque que le rang de la matrice A vaut 2 et que les deux vecteurs $e_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $e_2 = (1, 0, -1, 0)$ sont libres et dans le noyau, donc forment une base de $SEP(0)$. Ils ne sont pas orthogonaux, on y remédie :

$$\begin{aligned} e_2' = e_2 - \alpha e_1 \perp e_1 &\iff \langle e_2 - \alpha e_1 | e_1 \rangle = 0 \\ &\iff \langle e_2 | e_1 \rangle - \alpha \langle e_1 | e_1 \rangle = 0 \\ &\iff 1 - \alpha \times 2 = 0 \\ &\iff \alpha = 1/2 \\ &\iff e_2' = (1/2, 1/2, -1, 0) \end{aligned}$$

Les autres sous-espaces propres sont orthogonaux à $SEP(0)$ d'après le théorème spectral, donc leurs vecteurs (x, y, z, t) vérifient du système :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & -y & +0 & +0 & = & 0 \\ x & +0 & -z & +0 & = & 0 \end{array} \right.$$

et sont donc de la forme (x, x, x, t).

Analyse – L'image d'un tel vecteur par A est :

$$A \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ 3x \end{pmatrix}.$$

S'il est propre et associé à une valeur propre λ, alors $t = \lambda x$ et $3x = \lambda t$, d'où $3x = \lambda^2 x$. Et $x \neq 0$, d'où $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

Synthèse – Les vecteurs propres $e_3 = (1, 1, 1, \sqrt{3})$ et $e_4 = (1, 1, 1, -\sqrt{3})$ sont propres et associés respectivement aux valeurs propres $+\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Ces valeurs propres sont distinctes, ces vecteurs propres sont donc orthogonaux. Une base orthogonale formée de vecteurs propres est donc :

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = ((1, -1, 0, 0), (1/2, 1/2, -1, 0), (1, 1, 1, \sqrt{3}), (1, 1, 1, -\sqrt{3})).$$

Une fois normés ces vecteurs, on obtient une *b.o.n.* formée de vecteurs propres :

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1/2,1/2,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1,\sqrt{3}), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1,-\sqrt{3}) \right).$$

Matriciellement : la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ est telle que } P^T = P^{-1} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Soient λ_{min} la plus petite valeur propre de u et λ_{max} la plus grande. Montrer que :
$$\forall x \in E,\ \lambda_{min}\langle x|x\rangle \leq \langle x|u(x)\rangle \leq \lambda_{max}\langle x|x\rangle.$$
2. Soit une matrice symétrique $S = (s_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient λ_{min} la plus petite valeur propre de S et λ_{max} la plus grande. Montrer que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_{min} \leq s_{ii} \leq \lambda_{max}.$$
3. Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient α et β les plus grandes valeurs propres de $A^T \cdot A$ et de $B^T \cdot B$ respectivement. Montrer que :
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(AB), \quad \lambda^2 \leq \alpha \cdot \beta.$$

---

1. L'endomorphisme u est autoadjoint, d'où (théorème spectral) il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de E formée de vecteurs propres de u : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$. D'où, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \in E$, $\langle x|u(x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i | \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \varepsilon_j\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i\lambda_j x_j \langle \varepsilon_i|\varepsilon_j\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i \lambda_j x_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.
Donc $\lambda_{min}\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_{min} x_i^2 \leq \langle x|u(x)\rangle \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{max} x_i^2 = \lambda_{max}\|x\|^2$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. L'endomorphisme $u : X \mapsto S \cdot X$ est symétrique car sa matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est S. Or cette base est orthonormée et cette matrice est symétrique. On applique l'encadrement de la question précédente : $\lambda_{min} X^T \cdot X \leq X^T \cdot S \cdot X \leq \lambda_{max} X^T \cdot X$, pour tout vecteur colonne X. Choisissons pour vecteur X le $i-$ème vecteur de la base canonique : $X^T \cdot X = 1$ et $X^T \cdot S \cdot X = s_{ii}$. Donc $\lambda_{min} \leq s_{ii} \leq \lambda_{max}$.
3. On déduit de l'encadrement de la première question, appliqué à l'endomorphisme représenté par la matrice symétrique $A^T \cdot A$, l'inégalité : $X^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot X \leq \alpha X^T \cdot X$ Or $X^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot X = (AX)^T \cdot (AX) = \|AX\|^2$. D'où $\|AX\|^2 \leq \alpha\|X\|^2$ pour tout X. De même, $\|BX\|^2 \leq \beta\|X\|^2$ pour tout X.
Si λ est une valeur propre de AB, alors il existe un vecteur X non nul tel que $(AB)X = \lambda X$. D'où $\|(AB)X\|^2 = \lambda^2\,\|X\|^2$.
Or $(AB)X = A(BX)$, d'où $\|(AB)X\|^2 \leq \alpha\|BX\|^2 \leq \alpha\beta\|X\|^2$.
D'où $\lambda^2\,\|X\|^2 \leq \alpha\beta\|X\|^2$. Or le vecteur X n'est pas nul, donc : $\lambda^2 \leq \alpha \cdot \beta$.

Exercice 6. Soit E un espace euclidien, u un vecteur de E tel que $||u|| = 1$.
Pour chaque réel α, on définit l'endomorphisme φ_α par :

$$\forall x \in E,\ \varphi_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u.$$

1. Interpréter géométriquement l'endomorphisme φ_{-1}. Calculer $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de α, l'endomorhisme φ_α est-il bijectif ?
2. Déterminer un polynôme annulateur de l'endomorphisme φ_α.
3. Montrer que φ_α est un endomorphisme autoadjoint de E.
4. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. Est-il diagonalisable ?

5. Montrer que l'endomorphisme φ_α est une isométrie vectorielle si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$. Reconnaître l'endomorphisme φ_α dans ces deux cas.

---

1. Soit $x \in E$:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta(x) &= \varphi_\beta(x) + \alpha\langle \varphi_\beta(x), u\rangle u = x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x + \beta\langle x, u\rangle u, u\rangle u = x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x, u\rangle u + \alpha\beta\langle x, u\rangle\langle u, u\rangle u \\ &= x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x, u\rangle u + \alpha\beta\langle x, u\rangle u = x + (\alpha+\beta+\alpha\beta)\langle x, u\rangle u = \varphi_{\alpha+\beta+\alpha\beta}(x).\end{aligned}$$

Si $\alpha = -1$, on reconnaît en φ_{-1} le projecteur orthogonal sur l'hyperplan orthogonal à u, qui n'est pas bijectif (de noyau $\mathrm{Vect}(u)$).

Sinon, le calcul ci-dessus montre que $\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha/(1+\alpha)} = \mathrm{id}_E = \varphi_{-\alpha/(1+\alpha)} \circ \varphi_\alpha$, donc que φ_α admet une réciproque, donc est bijectif.

2. En reprenant le calcul précédent dans le cas particulier où $\alpha = \beta$, on trouve :

$$\forall x \in E,\ \varphi_\alpha^2(x) = (2+\alpha)\varphi_\alpha(x) - (1+\alpha)x.$$

D'où $\varphi_\alpha^2 = (2+\alpha)\varphi_\alpha - (1+\alpha)\mathrm{id}_E$. Donc, le polynôme $X^2 - (2+\alpha)X + (1+\alpha)$ est annulateur de φ_α.

3. Soit $x,\ y \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\langle \varphi_\alpha(x)|y\rangle &= \langle x + \alpha\langle x, u\rangle u|y\rangle \\ &= \langle x|y\rangle + \alpha\langle x, u\rangle\langle u|y\rangle \\ &= \langle x|y\rangle + \langle x, \alpha\langle u|y\rangle u\rangle \\ &= \langle x, y + \alpha\langle y|u\rangle u\rangle \\ &= \langle x, \varphi_\alpha(y)\rangle.\end{aligned}$$

4. On construit une base adaptée. Le vecteur u est un vecteur propre associé à la valeur propre $1+\alpha$. Si un vecteur x est orthogonal à u, alors $\varphi_\alpha(x) = x$. Si $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n_1})$ est une base de $[\mathrm{Vect}(u)]^\perp$, alors $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n_1}, u)$ est une base de l'*ev* E car $\mathrm{Vect}(u) \oplus [\mathrm{Vect}(u)]^\perp = E$. Cette base est formée de vecteurs propres de φ_α, donc φ_α est diagonalisable et son spectre est $\{1; 1+\alpha\}$.

Remarques :

— on peut répondre, en arguant du théorème spectral, que φ_α est diagonalisable comme tout endomorphisme autoadjoint, mais le théorème spectral ne donne pas le spectre ;

— on peut aussi constater que le polynôme annulateur $X^2 - (2+\alpha)X + (1+\alpha)$ est égal à $(X-1)(X-(1+\alpha))$ et en déduire que $\mathrm{Sp}(\varphi_\alpha) \subset \{1; 1+\alpha\}$;

— dans le cas où $\alpha \neq 0$, le polynôme $X^2 - (2+\alpha)X + (1+\alpha) = (X-1)(X-(1+\alpha))$ est non seulement annulateur de φ_α mais il est aussi scindé à racines simples, on en déduit que φ_α est diagonalisable ;

— du spectre, on déduit que 0 est une valeur propre de φ_α si, et seulement si, $\alpha = -1$. On retrouve ainsi que φ_α est bijectif si, et seulement si, $\alpha \neq -1$.

5. Soient x et y deux vecteurs de E. Il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Vect}(u) \times \mathrm{Vect}(u)^\perp$ et un unique couple $(y_1, y_2) \in \mathrm{Vect}(u) \times \mathrm{Vect}(u)^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. On a donc

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle &= \langle x_1 + x_2|y_1 + y_2\rangle \\ &= \langle x_1|y_1\rangle + \langle x_2|y_1\rangle + \langle x_1|y_2\rangle + \langle x_2|y_2\rangle \\ &= \langle x_1|y_1\rangle + \langle x_2|y_2\rangle\end{aligned}$$

De même on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}\langle \varphi_\alpha(x)|\varphi_\alpha(y)\rangle &= \langle \varphi_\alpha(x_1 + x_2)|\varphi_\alpha(y_1 + y_2)\rangle \\ &= \langle (1+\alpha)x_1 + x_2|(1+\alpha)y_1 + y_2\rangle \\ &= (1+\alpha)^2\langle x_1|y_1\rangle + \langle x_2|y_2\rangle\end{aligned}$$

Donc φ_α est une isométrie si, et seulement si, pour tous x_1 et y_1 dans $\mathrm{Vect}(u)$,

$$(1+\alpha)^2\langle x_1|y_1\rangle = \langle x_1|y_1\rangle.$$

C'est-à-dire si, et seulement si, $(1+\alpha)^2 = 1$.

Donc si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$.

Si $\alpha = 0$, alors φ_α est l'identité. Si $\alpha = -2$, alors φ_α est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Exercice 7 (Matrices symétriques positives)**.** Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice B^TB est une matrice symétrique positive, *i.e.* $B^TB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Soit A une matrice symétrique, *i.e.* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si, et seulement si, elle est positive et inversible.

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Et que cette matrice B est unique. On l'appelle la **racine carrée** de A.

---

1. D'une part, la matrice $B^T B$ est carrée : $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, d'où $B^T \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ et $B^T B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. D'autre part, elle est symétrique car $(B^T \cdot B)^T = B^T \cdot (B^T)^T = B^T \cdot B$. Enfin, elle est positive car : $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\ X^T(B^T B)X = (BX)^T(BX) = \|BX\|^2 \geq 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. On veut montrer qu'elle est définie positive si, et seulement si, elle est inversible. Si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur colonne X non nul tel que $AX = 0$. D'où $X^T AX = 0$, donc la matrice A n'est pas définie positive. Réciproquement : si A est inversible, alors 0 n'appartient pas à $\mathrm{Sp}(A)$, d'où toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, donc A est définie positive.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. La matrice A est symétrique, d'où, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que la matrice $D = P^T AP$ est diagonale. La matrice A est positive, d'où la matrice D s'écrit $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où les valeurs propres λ_i sont positives, ce qui permet de définir la matrice $C = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors $A = PC^2P^T = PCP^TPCP^T = B^2$, où la matrice $B = PCP^T$ est :
   - symétrique car $B^T = PC^TP^T = B$ car $C^T = C$;
   - positives car ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ sont positives.

   Reste à prouver l'unicité :

   • Première rédaction (sans matrices) : soit a l'endomorphisme représenté, dans une *bon* d'un espace euclidien E, par la matrice A. Si $a = b \circ b$, alors b commute avec a, d'où les *sep* de a sont stables par b. Soient λ une valeur propre de a, $E_\lambda(a)$ le *sep* de a associé à la valeur propre λ et b_λ l'endomorphisme induit par b sur ce *sep* (b_λ est bien défini car $E_\lambda(a)$ est stable par b).

   D'une part, $b_\lambda \circ b_\lambda = \lambda \mathrm{id}_{E_\lambda(a)}$. Par suite toutes les valeurs propres de b_λ ont pour carré λ, donc sont égales $\pm\sqrt{\lambda}$. De plus b est, par hypothèse, un endomorphisme autoadjoint positif. Par suite, toutes ses valeurs propres sont positives. Par suite, toutes les valeurs propres de b_λ sont égales à $+\sqrt{\lambda}$.

   D'autre part, l'endomorphisme b_λ est autoadjoint car l'endomorphisme b l'est. Par suite b_λ est diagonalisable.

   On en déduit que $b_\lambda = +\sqrt{\lambda}\mathrm{id}_{E_\lambda(a)}$ est déterminé de manière unique pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Et donc l'endomorphisme b est unique.

   • Seconde rédaction (avec matrices) : on sait déjà que la matrice $D = P^TAP$ est diagonale. La matrice B commute avec $A = B^2$, donc les *sep* de A sont stables par B. Par suite la matrice $C = P^TBP$ est, non seulement symétrique comme on le sait déjà, mais aussi diagonale par blocs :

$$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1\updownarrow \\ d_2\updownarrow \\ \vdots \\ d_r\updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad C = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} & \overset{d_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} d_1\updownarrow \\ d_2\updownarrow \\ \vdots \\ d_r\updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} B_1 & 0 & & \\ 0 & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & B_r \end{pmatrix} \end{array}.$$

   Et, pour chaque i, $B_i^2 = \lambda_i I_{d_i}$ car $C^2 = D$ d'une part. D'autre part, le bloc B_i appartient à $S_{d_i}^+(\mathbb{R})$ car la matrice C appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$. Le bloc B_i est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont positives et leur carré vaut λ_i. D'où $B_i = +\sqrt{\lambda_i} I_{d_i}$. Ceci détermine complètement la matrice C et donc aussi la matrice $B = PCP^T$, ce qui prouve qu'elle est unique.

Exercice 8. Soient E un espace euclidien, λ un réel et f une isométrie vectorielle de E telle que $(f - \lambda \mathrm{id}_E)^2 = 0$.

1. Montrer que $(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E))^\perp$ est stable par f.
2. En déduire que $(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E))^\perp = \{0_E\}$.
3. Conclure que $f = \pm \mathrm{id}_E$.

---

1. Les endomorphismes f et $g = f - \lambda \mathrm{id}_E$ commutent, d'où : le *sev* $G = \mathrm{Ker}(g)$ est stable par f ▷ **prop. 16 du chap. II**. L'endomorphisme f est une isométrie vectorielle, d'où (stabilité de l'orthogonal ▷ **proposition 18 du chapitre XII**) : $G^\perp$ est aussi stable pat f. Donc $(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E))^\perp$ est stable par f.
2. Notons $G = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$. Soit $x \in G^\perp$. On veut montrer que ce vecteur x est nul :

— d'une part $(f-\lambda \mathrm{id}_E)(x) \in G^\perp$ par stabilité de $G^\perp$ (question précédente) ;

— d'autre part $(f-\lambda \mathrm{id}_E)(x) \in G$ car $(f-\lambda \mathrm{id}_E)^2 = 0$ (par hypothèse).

D'où $(f-\lambda \mathrm{id}_E)(x) \in G \cap G^\perp$. Or $G \cap G^\perp = \{0_E\}$, d'où $(f-\lambda \mathrm{id}_E)(x) = 0_E$, autrement dit : $x \in G$. Or $x \in G^\perp$ depuis le début. Donc $x = 0_E$. C'est ce qu'on voulait montrer.

3. Le *sev* $G = \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_E)$ est de dimension finie, d'où : $\left(G^\perp\right)^\perp = G$, d'où $G = \{0_E\}^\perp$ d'après la question précédente. Donc $(\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_E) = E$: pour tout $x \in E$, $f - \lambda \mathrm{id}_E(x))(x) = 0$. Donc $f = \lambda \mathrm{id}_E$.

Exercice 9. Écrire la matrice, dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe dirigé et orienté par $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

On cherche la matrice A, dans la *bond* $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, de la rotation f d'axe dirigé et orienté par $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Le vecteur (normé) $\vec{w} = \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$ dirige et oriente l'axe de rotation. Un vecteur normal à l'axe de rotation (et normé) est $\vec{u} = \vec{k}$. En posant $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u} = \frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}$, on obtient une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ adaptée à la rotation f. Dans cette nouvelle base, la matrice de f est :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la vieille base $\mathcal{B}$ à la nouvelle base $\mathcal{B}'$. D'où $A = PA'P^{-1}$. Or la vieille et la nouvelle bases sont orthonormées, d'où les colonnes de la matrice P forment une *bon*, donc $P^{-1} = P^T$ et

$$\begin{aligned} A = P \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarques (comment vérifier le résultat) :

— les colonnes de la matrice A forment une *b.o.n.d.* car les vecteurs $f(u), f(v)$ et $f(w)$ sont les images respectives par la rotation f des vecteurs u, v et w qui formaient une *b.o.n.d.* ;

— l'axe de la rotaton f est dirigé par $\vec{w}$, d'où $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

— la trace de la matrice A est égale à celle de la matrice A', c'est-à-dire à $1 + 2\cos\frac{\pi}{6}$.

Exercice 10 (tiré de CCINP 2019 TSI Math 2)**.** On munit l'espace vectoriel $E = S_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 symétriques du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.

1. Un cas particulier — Montrer que l'application f qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, associe la matrice $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$ est une rotation de E qui conserve la trace et le déterminant : $f \in SO(E)$ et $\forall M \in E$, $\mathrm{tr}\, f(M) = \mathrm{tr}\, M$ et $\det f(M) = \det M$. Déterminer les sous-espaces propres de f.
2. Le cas général — Soit f une isométrie de E laissant invariante la matrice identité : $f \in O(E)$ et $f(I_2) = I_2$. Montrer que f conserve la trace et le déterminant.

---

1. L'application $f : E \to E$ est un endomorphisme car elle est linéaire et l'image de toute matrice symétrique 2×2 est encore une matrice symétrique 2×2.

   L'endomorphisme f est une rotation de E *ssi* sa matrice dans une *b.o.n.* de E est spéciale orthogonale ▷ **définition XII.28**.

L'*ev* $E = S_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3. Les trois matrices

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad J = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

forment une base (I, J, K) de l'*ev* E des matrices 2×2 symétriques. Et cette base est orthonormée pour le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.
Parce que $f(I) = I$, $f(J) = K$ et $f(K) = -J$, la matrice de l'endomorphisme f dans cette base (I, J, K) est

$$[f]_{(I,J,K)} = \begin{array}{c} \\ I \\ J \\ K \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(I) & f(J) & f(K) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right) \end{array}.$$

Cette matrice est orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée. De plus, son déterminant vaut 1, elle appartient donc à $SO_3(\mathbb{R})$. L'application f est donc une rotation de E.
De plus f conserve la trace car $\mathrm{tr}\, f(M) = \frac{a+c}{2} - b + \frac{a+c}{2} + b = a + c = \mathrm{tr}\, M$. Et conserve le déterminant car $\det f(M) = \left(\frac{a+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+c}{2} + b\right) - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = ac - b^2 = \det M$.
Soit χ_f Le polynôme caractéristique de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_f(x) = \det(x\mathrm{id}_E - f) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0\\ 0 & x & 1\\ 0 & -1 & x\end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1).$$

D'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{1\}$ et $1 \leq \dim SEP(1) \leq 1$. Or $f(I) = I$. Donc $SEP(1) = \mathrm{Vect}(I)$.

2. L'endomorphisme f de la question prcédente est bien un cas particulier car c'est une rotation, donc une isométrie. Et $f(I_2) = I_2$, donc il laisse invariante la matrice identité.

   Dans la cas général : si f est une isométrie, alors f conserve le produit scalaire. En particulier : $\heartsuit \begin{cases} \langle M, I_2\rangle = \langle f(M), f(I_2)\rangle \\ \langle M, M\rangle = \langle f(M), f(M)\rangle \end{cases}$ pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$.

   D'une part $\langle M, I_2\rangle = a \times 1 + b \times 0 + b \times 0 + c \times 1 = a + c = \mathrm{tr}\, M$. Et $f(I_2) = I_2$ par hypothèse, d'où $\langle f(M), f(I_2)\rangle = \langle f(M), I_2\rangle = \mathrm{tr}\, f(M)$. Donc l'application f conserve la trace.

   D'autre part $\langle M, M\rangle = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2b^2 + c^2$. D'où $\langle M, M\rangle - \langle M, I_2\rangle^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - (a + c)^2 = 2b^2 - 2ac = -2(ac - b^2) = -2\det M$. De même, $\langle f(M), f(M)\rangle - \langle f(M), I_2\rangle^2 = -2\det f(M)$.
   De $\heartsuit$ et de $f(I_2) = I_2$, on déduit que $-2\det f(M) = -2\det M$. Donc f conserve le déterminant.

Exercice 11 (Endomorphismes normaux)**.** Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$. (On dit d'un tel endomorphisme qu'il est **normal**.)

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$.
2. En déduire que u et u^* ont les mêmes spectre et sous-espaces propres.
3. Montrer que, si un *sev* F est stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u.
4. On suppose que $\dim E = 2$. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint ou la composée d'une homothétie et d'une rotation.

---

1. Soit $(x, y) \in E^2$: $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^* \circ u(x), y\rangle$ par définition de l'adjoint. Or $u^* \circ u = u \circ u^*$ par hypothèse. Donc $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle u \circ u^*(x), y\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$ par définition de l'adjoint.
2. Soit un vecteur $x \in E$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|u^*(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 - 2\lambda\langle u^*(x), x\rangle + \lambda^2\|x\|^2$.
   Or $\|u^*(x)\|^2 = \|u(x)\|^2$ d'après la première question et $\langle u^*(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle$ par définition de l'adjoint.
   D'où $\|u^*(x) - \lambda x\|^2 = \|u(x) - \lambda x\|^2$. On en déduit que x est un vecteur propre de u^* associé à la valeur propre λ si, et seulement si, c'est un vecteur propre de u associé à la même valeur propre. L'endomorphisme u et son adjoint ont donc les mêmes éléments propres.
3. On se place dans une base adaptée $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant une *bon* de F et une *bon* de $F^\perp$. La base B est ainsi une *bon* de E. Soit $M = [u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans cette base.

   D'une part, parce que le *sev* F est stable par u, la matrice M est triangulaire par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$.

   D'autre part, parce que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, $[u^*]_{\mathcal{B}} = M^T$, d'où $[u^*]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A^T & 0\\ B^T & C^T\end{pmatrix}$.

L'endomorphisme u est normal, d'où $u \circ u^* = u^* \circ u$, donc $M \cdot M^T = M^T \cdot M$. Par suite : $\begin{cases} A \cdot A^T + B \cdot B^T = A^T \cdot A \\ B \cdot C^T = A^T \cdot B \\ C \cdot B^T = B^T \cdot A \\ C \cdot C^T = B^T \cdot B + C^T \cdot C \end{cases}$.

De la première équation, on déduit que $B \cdot B^T = A^T \cdot A - A \cdot A^T$ et, par suite, $\operatorname{tr}(B \cdot B^T) = \operatorname{tr}(A^T \cdot A - A \cdot A^T)$. Or $\operatorname{tr}(A^T \cdot A - A \cdot A^T) = \operatorname{tr}(A^T \cdot A) - \operatorname{tr}(A \cdot A^T) = 0$. Et $\operatorname{tr}(B \cdot B^T) = \|B\|^2$, en utilisant la norme usuelle d'une matrice carrée. D'où $\|B\|^2 = 0$, donc $B = 0$.

La matrice M est donc diagonale par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ce qui implique que le *sev* $F^\perp$ est stable u.

4. On se place dans un *bon* de E. Dans cette base, l'endomorphisme u est représenté par une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et, parce que la base est orthonormée, son adjoint u^* est représenté par la matrice transposée $A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:
$u \circ u^* = u^* \circ u$ d'où $A \cdot A^T = A^T \cdot A$ d'où $b^2 = c^2$ et $ab + cd = ac + bd$.
Premier cas : $b = c$. Alors $A = A^T$, d'où $u = u^*$ est autoadjoint.
Second cas : $b = -c$. Alors $ab + cd = ac + bd$, d'où ($b = c = 0$ ou $a = d$).
Dans le premier sous-cas, la matrice A est diagonale donc symétrique, d'où u est auto-adjoint. Dans le second sous-cas, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et A est donc le produit de $\sqrt{a^2+b^2} I_2$, matrice d'une homothétie et de $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, matrice d'une rotation.

Exercice 12 (Le produit vectoriel)**.** Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3.

1. Soient deux vecteurs $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k} \in E$ et $\vec{w} = w_1\vec{\imath} + w_2\vec{\jmath} + w_3\vec{k} \in E$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{a} \in E$ tel que : $\forall \vec{u} \in E,\ \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{a}$.

Ce vecteur est noté $\vec{v} \wedge \vec{w}$ et est appellé le **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2. Montrer que : $\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{\imath} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{\jmath} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k}$.
3. À quelle condition le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est-il nul ? Cette condition est-elle nécessaire ? suffisante ?
4. Montrer que, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est orthogonal au plan $\operatorname{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$. Et que $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w})$ est une base directe.
5. Montrer que :
$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v})\,(\vec{w} \cdot \vec{w})\,.$$
En déduire que la norme du vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, autrement dit :
$$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\,|\sin(\vec{v}, \vec{w})|.$$

---

1. L'application $\varphi\ :\ E \to \mathbb{R},\ \vec{u} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une forme linéaire (car le déterminant est multilinéaire) et l'*ev* E est de dimension finie. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique vecteur $\vec{a}$ tel que : $\forall \vec{u} \in E,\ \varphi(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{a}$.
2. On développe le déterminant 3×3 en suivant la première colonne :
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}.$$
La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, on reconnaît le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (u_1, u_2, u_3) et d'un vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$ de coordonnées
$$\left(\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$
3. Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont liés, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ pour tout $\vec{u} \in E$, d'où : $\forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$. En particulier, $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$, donc $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$. Réciproquement, si la famille $(\vec{v}, \vec{w})$ n'est pas liée, alors on peut la compléter en une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dont le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ n'est pas nul, donc $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$.

4. $\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, d'où $\vec{v} \perp (\vec{v} \wedge \vec{w})$. De même pour $\vec{w}$. De plus, par définition du produit vectoriel, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ est strictement positif car $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$ d'après la question précédente.
5. Grâce à la formule de la question 2, on vérifie par le calcul que : $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v})\,(\vec{w} \cdot \vec{w})$. Par suite, $\|\vec{v} \wedge w\|^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 \cos^2(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 \sin^2(\vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Soit λ une valeur propre complexe de la matrice A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.
   En calculant $X^T \cdot A \cdot \overline{X}$, montrer que λ est imaginaire pur, autrement dit : que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.
2. Montrer que les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.
3. Vérifier que les matrices $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent.
4. Montrer que la matrice $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est orthogonale.
5. La matrice R appartient-elle à $SO_n(\mathbb{R})$?

---

1. D'une part, A est antisymétrique, d'où :
   $X^T \cdot A \cdot \overline{X} = -(AX)^T \cdot \overline{X} = -(\lambda X)^T \cdot \overline{X} = -\lambda(X^T\overline{X})$.
   D'autre part, les coefficients de A sont réels, d'où :
   $X^T \cdot A \cdot \overline{X} = X^T \cdot \overline{AX} = X^T\overline{\lambda X} = \overline{\lambda}(X^T\overline{X})$. D'où $-\lambda(X^T\overline{X}) = \overline{\lambda}(X^T\overline{X})$.
   Or $X^T\overline{X} = x_1\overline{x_1} + \cdots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$ car $X \neq 0$. D'où $\overline{\lambda} = -\lambda$. Donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.
2. La matrice $I_n - A$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(I_n - A) = \{0\} \iff 1 \notin \mathrm{Sp}(A)$. D'après la question précedente, $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$, donc $I_n - A$ est inversible. De même $I_n + A$ est inversible.
3. Les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent : $(I_n - A)(I_n + A) = (I_n + A)(I_n - A)$.
   Multiplions à droite par $(I_n + A)^{-1}$: $(I_n - A) = (I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.
   Puis multiplions à gauche par $(I_n + A)^{-1}$:
   $(I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.
   Donc les matrices $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent.
4. La matrice R est orthogonale car

$$\begin{aligned} R \cdot R^T &= (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \cdot (I_n - A)^T \left[(I_n + A)^{-1}\right]^T \\ &= (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \cdot (I_n - A)^T \left[(I_n + A)^T\right]^{-1} \\ &= (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \cdot (I_n + A)\,[(I_n - A)]^{-1} \\ &= (I_n + A)^{-1}(I_n + A) \cdot (I_n - A)\,[(I_n - A)]^{-1} \\ &= I_n \cdot I_n = I_n. \end{aligned}$$

5. $\det(I_n - A) = \det(I_n - A)^T = \det(I_n + A)$ et $\det(I_n + A)^{-1} = \frac{1}{\det(I_n + A)}$, d'où $\det R = +1$. La matrice R est orthogonale et son déterminant vaut $+1$, donc elle appartient à $SO_n(\mathbb{R})$.