Colle n° 16

E.v.n.

Exercice 1. Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in E,\ N_2(f) \leq \alpha \cdot N_1(f)$.
3. Montrer que, pour tout $f \in E$,
$$f(x) = e^{-x} \int_0^x [f(t) + f'(t)]\, \mathrm{e}^t dt.$$
4. En déduire que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 2. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension deux. La norme « un » d'un vecteur $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est définie par $\|\vec{v}\|_1 = |x| + |y|$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme représenté, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, par la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $|||f|||_1 = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$.
2. Soient un réel $\alpha > 0$ et un vecteur $\vec{u} = 1\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$. Soit $p : E \to E,\ \vec{v} \mapsto p(\vec{v})$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{u})$. Écrire la matrice, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de p et en déduire $|||p|||_1$ en fonction de α.
3. Dessiner la boule unité $\mathcal{B}$ et son image directe par l'application p. En utilisant ce dessin, retrouver la valeur de $|||p|||_1$.

Exercice 3. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum |u_n|$ converge, ℓ^2 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum u_n^2$ converge et ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et que $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$.
2. On définit sur ℓ^1 trois normes par :
$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad , \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$
pour tout $u \in \ell^1$.
   (a) Déterminer, s'il existe, le plus petit réel α tel que $\forall u \in \ell^1,\ \|u\|_\infty \leq \alpha \cdot \|u\|_1$.
   (b) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
   (c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ? Et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$?