Colle 16 Espaces vectoriels normés

BELLIOT Raphaël

Exercice 1.

1. Montrer que $A \mapsto \chi_A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fermé.
3. Montrer que si A admet pour valeur propre λ_1, ..., λ_r de multiplicité respectives n_1, ..., n_r, alors
   $\Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix} \in \overline{S(A)}$.
   On pourra utiliser la matrice $\Delta = \mathrm{Diag}\,(\alpha, \cdots, \alpha^n)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Réciproque ?
4. Caractériser les matrices A pour lesquelles $S(A)$ est borné, fermé.

Solution **1.**

1. *Soit* $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[X]$, $A \mapsto \chi_A$ *est continue car les coefficients du polynôme caractéristique s'écrivent comme des polynômes en les coefficients de la matrice.*
2. *Soit une suite* $(M_n = P_n^{-1}AP_n) \in S(A)^{\mathbb{N}}$ *qui converge vers* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Pour tout* n, $M_n = P_n^{-1}AP_n$ *est semblable à* A*, donc est digonalisable de polynôme annulateur minimal scindé* $p_A = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, A} (X - \lambda)$*. Donc, pour tout* $n\mathbb{N}$, $p_A(M_n) = 0$*. Par continuité,* $p_A(M) = 0$ *et* M *est diagonalisable.*
3. *Soit* A *une matrice. Une base de trigonalisation montre qu'il existe* $T \in S(A)$ *triangulaire supérieure avec les* λ_i *appraissant* n_i *fois sur la diagonale. Si* $T = (t_{i,j})$*, alors* $\Delta^{-1}T\Delta$ *a pour coefficient* $a^{j-i}t_{i,j}$ *si* $j \geq i$ *et* 0 *sinon. Quand* a *tend vers* 0, $\Delta^{-1}T\Delta$ *tend vers* Ω*. Ceci qui montre qu'elle est dans* $\overline{S(A)}$*.*
   Réciproquement, Si $\Omega \in \overline{S(A)}$*. Si* $\Omega \in S(A)$*, toutes les matrices de* $S(A)$ *sont semblables à* Ω*. Sinon, il existe* $(M_n) \in S(A)^{\mathbb{N}}$ *qui converge vers* Ω*. Le polynôme caractéristique* chi_{M_n} *est constant donc* $\chi_{M_n} = \chi_\Omega$*.*
4. *S'il existe une matrice non diagonale* M *dans* $S(A)$*, alors* $\Delta^{-1}A\Delta$*, montre que* $S(A)$ *est non bornée. Donc* A *n'est semblable qu'à des matrices diagonales : tout vecteur non nul est vecteur propre, c'est une homothétie. Enfn, une homothétie convient.*

LE QUERE Léandre

Exercice 2. Soit $r > 0$ et E_r l'ensemble des applications de $]-r, r[$ dans $\mathbb{R}$ développables en série entière. Pour $f \in E_r$, on pose $\psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{x+t} dt$.

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de E_r.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propores de ψ ; ψ est-il un automorphisme de E_r ?
3. Pour un polynôme, on pose $\|P\| = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |P(t)|$; ψ induit-elle une application continue sur $\mathbb{R}[t]$?

   Son inverse est-elle continue ?

Solution **2.** 1. *On a*

$$\psi(f)(x) = \int_0^1 \frac{f(xu)}{1+u} du,$$

d'où si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ *pour* $y \in]-r, r[$, *on a donc pour* $x \in]-r, r[$:

$$\psi(f)(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n x^n \frac{u^n}{1+u} \right) du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du$$

vu que $\left| a_n x^n \frac{u^n}{1+u} \right| \leq |a_n x^n|$. *En posant* $I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du$, *il vient*

$$\psi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_n x^n.$$

2. *On obtient* $\psi(f) = \lambda f$ *ssi* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n I_n = \lambda a_n$. *On en déduit que les valeurs propres sont* $\{I_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *les vecteurs propres état proportionnels à* x^n, *donc* ψ *est injective.*

   De plus, ψ *est surjective : si* $g = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, *on pose* $a_n = \frac{b_n}{I_n}$.

3. ψ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}[t]$. *De plus, si* $x \in [-1, 1]$, $|\psi(f)(x)| \leq \|f\|$, *donc* ψ *est continue. En revanche,* ψ^{-1} *ne l'est pas. En effet, si* $f_n(x^n$ *et* $\psi^{-1}(f_n)(x) = \frac{x^n}{I_n}$. *On* $\|f_n\| = 1$, *tandis que* (I_n) *tend vers* 0.

PINSON Paul

Exercice 3. Soit E un espace tel que toute série absolument convergente est convergente. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est libre.
On pose $F_n = \operatorname{Vect}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

1. Soit A une partie non vide de E et $x \in E$.
   Montrer que $d(x, A) = \inf_{y\in A} \|y - x\|$ existe et que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$
2. Justifier qu'il existe une suite de réels $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \mu_{n+1}\|a_{n+1}\| \leq \frac{1}{3} d(\mu_n a_n, F_{n-1})$$
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \mu_n a_n$ converge.
4. On note $l = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n a_n$ la somme de cette série et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu_k a_k$.
   Montrer que $d(l, F_n) = d(r_n, F_n)$ et en déduire que l n'appartient à aucun des F_n.
5. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle que toute série absolument convergente pour cette norme soit convergente ?

Solution **3.**

1. *L'ensemble est minoré par* 0 *et non vide, donc la borne inférieure existe.*
   Si $d(x, A) = 0$*, par caracrtérisation de la borne inférieure, il existe une suite* $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$*, telle que* $d(x, a_n)$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$*. Par définition,* (a_n) *tend vers* x *et* $x \in \overline{A}$*.*
2. F_n *est fermé et* $\mu_n a_n \notin F_{n-1}$ *donc* $d(\mu_n a_n, F_{n-1}) > 0$ *; on construit donc la suite par récurrence.*
3. $\|\mu_{n+1} a_{n+1}\| \leq \frac{1}{3} d(\mu_n a_n, F_{n-1}) \leq \frac{1}{3} \|\mu_n a_n\|$ *donc* $\sum \mu_n a_n$ *est absolument convergente donc convergente, par hypothèse.*
4. $l - r_n \in F_n$ *donc* $d(l, F_n) = d(r_n, F_n)$*.*
   pour $y \in F_n$*, on a*
   $$\|r_n - y\| \geq \|\mu_{n+1} a_{n+1} - y\| - \|r_{n+1}\| \geq d(\mu_{n+1} a_{n+1}, F_n) - \|r_{n+1}\|$$
   et
   $$\|r_{n+1}\| = \|\sum_{k=n+2}^{+\infty} \mu_k a_k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 3^{-k} \|\mu_{n+2} a_{n+2}\| \leq \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} d(\mu_{n+1} a_{n+1}, F_n)$$
   donc
   $$d(l, F_n) \geq \frac{1}{2} d(\mu_{n+1} a_{n+1}, F_n) > 0.$$
5. *Avec* $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *on a une base dénombrable ce qui n'est pas possible d'après ce qui précède.*

Exercice 4. Soit $E = C^1([0,1),\mathbb{R})$.

1. Montrer que sur E, les applications $N_1 : f \to |f(0)| + \sup\limits_{[0,1]} |f + 2f'|$ et $N_2 : f \to \sup\limits_{[0,1]} |f| + \sup\limits_{[0,1]} |f'|$ sont deux normes équivalentes.
2. Sont-elles équivalentes à la norme de la convergence uniforme ?

Solution **4.** Il est clair que ce sont des normes et que $N_1 \leqslant 2N_2$

1. *Montrons l'autre inégalité.*
   Posons $g = f + 2f'$. *Donc* $\left(2f\, e^{t/2}\right)' = g(t)\, e^{t/2}$, *ou encore*

$$f(t) = \frac{1}{2} \times e^{-t/2} \times \int_0^t g(x) e^{x/2}\, dx + f(0)$$

   On en déduit que

$$\sup_{[0,1]} |f| \leq \sup_{[0,1]} |g| \times \sup_{[0,1]} \left[e^{-t/2} \times \int_0^t \frac{1}{2} e^{x/2}\, dx \right] + |f(0)| \leq N_1(f).$$

   Par ailleurs, $f' = \dfrac{1}{2}(g - f)$, *donc*

$$\sup_{[0,1]} |f'| \leq \frac{1}{2} \left(\sup_{[0,1]} |g| + \sup_{[0,1]} |f| \right) \leq N_1(f)$$

   Ainsi $N_2(f) \leqslant 2N_1(f)$ *et les deux normes sot équivalentes.*

2. *Elles ne sont pas équivalentes à* N_∞ *car, si on prend* $f_n : x \to exp(nx)$, *alors* $N_2(f_n) = (n+1)exp(n)$ *alors que* $N_\infty(f_n) = exp(n)$. *Donc,* $\lim_{+\infty}(N_2(f_n)/N\infty(f_n)) = +\infty$.