Corrigé de la colle n$^{\text{o}}$ 16

E.v.n.

29 janvier 2025

Exercice 1. Soit E l'ensemble des fonctions $f\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0)=0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f)=\|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f)=\|f+f'\|_\infty.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Déterminer un réel $\alpha>0$ tel que $\forall f\in E,\ N_2(f)\leq \alpha\cdot N_1(f)$.
3. Montrer que, pour tout $f\in E$,

$$f(x)=e^{-x}\int_0^x [f(t)+f'(t)]\,\mathrm{e}^t dt.$$

4. En déduire que les deux normes sont équivalentes.

Soit E l'ensemble des fonctions $f\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0)=0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f)=\|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f)=\|f+f'\|_\infty.$$

1. L'ensemble des fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. De plus, la fonction nulle appartient à E. Et une combinaison linéaire de fonctions :
   — de classe $\mathcal{C}^1$ est encore de classe $\mathcal{C}^1$;
   — égales à 0 en 0 est encore égale à 0 en 0.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.
   Autre méthode — L'ensemble E est le noyau de la forme linéaire $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ f\mapsto f(0)$, c'est donc un *sev* de l'*ev* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
   Si $f\in E$, alors f' est continue sur le segment $[0,1]$, d'où f' est bornée, donc la fonction N_1 est bien définie sur E. C'est une norme car :
   — $N_1(f)=0_\mathbb{R} \implies \|f'\|_\infty=0 \implies \forall x\in[0,1],\ f'(x)=0$. D'où la fonction f est constante sur l'intervalle $[0,1]$. Or $f(0)=0$. D'où $\forall x\in[0,1], f(x)=0$. Donc $f=0_E$.
   — elle vérifie l'inégalité triangulaire car la norme $\|\cdot\|_\infty$ la vérifie.

   Si $f\in E$, alors les fonctions f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$, d'où $f+f'$ est bornée, donc la fonction N_2 est bien définie sur E. C'est une norme car :
   — $N_2(f)=0_\mathbb{R} \implies \|f+f'\|_\infty=0 \implies \forall x\in[0,1],\ f(x)+f'(x)=0 \implies \exists C\in RR,\ \forall x\in[0,1],\ f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{-x}$. Or $f(0)=0$, d'où $C=0$. D'où $\forall x\in[0,1], f(x)=0$. Donc $f=0_E$.
   — elle vérifie l'inégalité triangulaire car la norme $\|\cdot\|_\infty$ la vérifie.
2. Soit $f\in E$: $N_2(f)=\|f+f'\|_\infty\leq\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$. Or $\forall x\in[0,1],\ f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt$, d'où $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt$ (car $f(0)=0$), d'où $|f(x)|\leq\int_0^x|f'(t)|\,dt\leq|x-0|\times\|f'\|_\infty\leq\|f'\|_\infty$ (car $x\in[0,1]$), d'où $\|f\|_\infty\leq\|f'\|_\infty$. Donc $N_2\leq 2\cdot N_1$.
3. Soit $f\in E$: $\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{e}^t dt=\left[f(t)\mathrm{e}^t\right]_0^x-\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t dt$ en intégrant par partie. Or $\left[f(t)\mathrm{e}^t\right]_0^x=f(x)\mathrm{e}^x$ car $f(0)=0$. D'où $\displaystyle\int_0^x\left[f(t)+f'(t)\right]e^t dt=f(x)\mathrm{e}^x$. Donc $f(x)=e^{-x}\displaystyle\int_0^x\left[f(t)+f'(t)\right]\mathrm{e}^t dt$.

4. $|f(x)| \le e^{-x}\int_0^x \left|f(t)+f'(t)\right| \mathrm{e}^t dt \le \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \left|f(t)+f'(t)\right| \mathrm{e}^x dt \le \int_0^x \left|f(t)+f'(t)\right| dt \le |x| \times \|f+f'\|_\infty \le \|f+f'\|_\infty$.
D'où $\|f\|_\infty \le \|f+f'\|_\infty$.
Or $f' = f+f'-f$, d'où $\|f'\|_\infty \le \|f+f'\|_\infty + \|f\|_\infty$. Donc $N_1 \le 2N_2$.

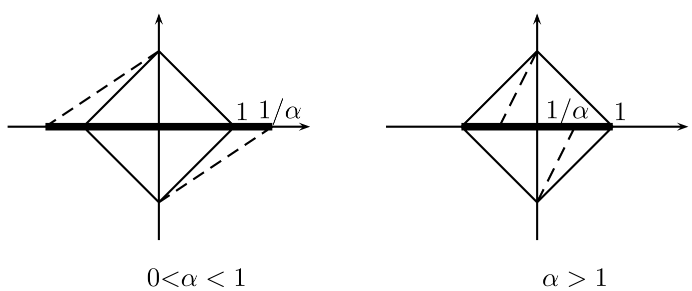
Exercice 2. Soit $(\vec\imath, \vec\jmath)$ une base d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension deux. La norme « un » d'un vecteur $\vec v = x\vec\imath + y\vec\jmath$ est définie par $\|\vec v\|_1 = |x| + |y|$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme représenté, dans la base $(\vec\imath, \vec\jmath)$, par la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $|\!|\!| f |\!|\!|_1 = \max(|a|+|b|, |c|+|d|)$.
2. Soient un réel $\alpha > 0$ et un vecteur $\vec u = 1\vec\imath + \alpha\vec\jmath$. Soit $p : E \to E,\ \vec v \mapsto p(\vec v)$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(\vec\imath)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec u)$. Écrire la matrice, dans la base $(\vec\imath, \vec\jmath)$, de p et en déduire $|\!|\!| p |\!|\!|_1$ en fonction de α.
3. Dessiner la boule unité $\mathcal{B}$ et son image directe par l'application p. En utilisant ce dessin, retrouver la valeur de $|\!|\!| p |\!|\!|_1$.

---

1. Soit la constante $k = \max(|a|+|b|, |c|+|d|)$. Pour tout $\vec v \in E$, $\|f(\vec v)\| = |ax+cy| + |bx+dy| \le |a||x| + |c||y| + |b||x| + |d||y| \le (|a|+|b|)|x| + (|c|+|d|)|y| \le k(|x|+|y|) \le k \cdot \|\vec v\|$.
De plus, k est la melleure (la plus petite) constante possible car :
   — si $\max(|a|+|b|, |c|+|d|) = |a|+|b|$, alors en choisissant $x=1$ et $y=0$, on réalise l'égalité $\|f(\vec v)\| = |ax+cy| + |bx+dy| = |a|+|b| = (|a|+|b|)(|1|+|0|) = k\|\vec v\|$;
   — de même si $\max(|a|+|b|, |c|+|d|) = |c|+|d|$, en choisissant $x=0$ et $y=1$).
Donc $|\!|\!| f |\!|\!|_1 = \max(|a|+|b|, |c|+|d|)$.
2. $p(\vec\imath) = \vec\imath$ et $p(\vec\jmath) = -\frac{1}{\alpha}\vec\imath$ car $\vec\jmath = -\frac{1}{\alpha}\vec\imath + \frac{1}{a}\vec u$ et $p(\vec u) = \vec 0$. La matrice, dans la base $(\vec\imath, \vec\jmath)$, de p est donc
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Et, par suite : $|\!|\!| p |\!|\!|_1 = \max(1, \frac{1}{\alpha})$.
3.



En utilisant le dessin : $|\!|\!| p |\!|\!|_1 = \frac{1}{\alpha}$ si $0 < \alpha \le 1$ et $|\!|\!| p |\!|\!|_1 = 1$ si $1 \le \alpha$.

Exercice 3. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum |u_n|$ converge, ℓ^2 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum u_n^2$ converge et ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et que $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$.
2. On définit sur ℓ^1 trois normes par :
$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad , \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$
pour tout $u \in \ell^1$.

(a) Déterminer, s'il existe, le plus petit réel α tel que $\forall u \in \ell^1,\ \|u\|_\infty \leq \alpha \cdot \|u\|_1$.

(b) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

(c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ? Et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$?

---

1. Si la série numérique $\sum |u_n|$ converge, alors la suite u_n tend vers 0, d'où : à partir d"un certain rang, $|u_n| \leq 1$ et alors $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$, d'où la convergence de la série $\sum u_n^2$. Donc $\ell^1 \subset \ell^2$.
   Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite u_n^2 tend vers 0 et la suite u_n tend donc aussi vers 0. La suite u_n est donc convergente, or toute suite convergente est bornée, donc la suite u_n est bornée. Donc $\ell^2 \subset \ell^\infty$.
   La suite nulle appartient à ℓ^1, à ℓ^2 et à ℓ^∞. Reste à montrer que ces ensembles sont stables par combinaisons linéaires, ce qui en fera des *sev* de l'*ev* $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Soient λ et μ deux réels :
   - Si les suites u_n et v_n sont bornées, alors il existe des réels U et V tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq U$ et $|v_n| \leq V$. D'où $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| U + |\mu| V$ est majorée, donc ℓ^∞ est un *sev*.
   - Si les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, alors la série $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ converge aussi car $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n|$. Donc ℓ^1 est un *sev*.
   - Si les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent, alors il en est de même de la série $\sum |u_n v_n|$ car $0 \leq |u_n v_n| \leq \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ car $(|u_n| - |v_n|)^2 \geq 0$. On en déduit que la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge car $(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda\mu u_n v_n + \mu^2 u_n^2$ et les trois séries $\sum u_n^2$, $\sum v_n^2$ et $\sum u_n v_n$ convergent. Donc ℓ^2 est un *sev* ▷ **voir la même question sur L_2 dans l'exo 4 du chapitre VIII**.
2. (a) Pour toute suite $u \in E$, $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \|u\|_1$ qui est un majorant et le sup est le plus petit majorant. D'où $\alpha = 1$ convient, de plus c'est le plus petit réel possible car la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0$ appartient à ℓ^1 et vérifie l'égalité $\|u\|_\infty = \|u\|_1$.

   (b) Soit, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(N)}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{(N)} = 1 \quad \text{si} \quad n \leq N \quad \text{et} \quad u^{(N)} = 0 \quad \text{si} \quad n > N.$$
   Chaque suite $u^{(N)}$ appartient bien à ℓ^1 et
   $$\|u^{(N)}\|_1 = N + 1 \qquad , \qquad \|u^{(N)}\|_\infty = 1.$$
   Par l'absurde : supposons qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall u \in \ell_1,\ \|u\|_1 \leq \|u\|_\infty$. En particulier, $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|u^{(N)}\|_1 \leq \beta \cdot \|u^{(N)}\|_\infty$. C'est absurde. Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

   (c) En utilisant les mêmes suites $u^{(N)}$, on montre de même qu'aucune de ces normes n'est équivalente à l'autre car :
   $$\|u^{(N)}\|_1 = N + 1 \qquad , \qquad \|u^{(N)}\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|u^{(N)}\|_2 = \sqrt{N+1}.$$