D. M. n° 8

Fonctions de matrices symétriques, continuité et convexité

Dans ce problème, on propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

- n désigne un entier naturel non nul ;
- si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq q$ est noté $\llbracket p, q \rrbracket$;
- si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;
- B_n désigne l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même ;
- I est un intervalle de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$;
- une fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = P(x)$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $D_n(\mathbf{R})$, resp. $S_n(\mathbf{R})$, resp. $O_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;
- on note Tr l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;
- si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note tM sa transposée, on note $\text{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $[M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i -ème ligne et j -ème colonne ;
- on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa norme infinie, notée $\|\cdot\|$ et définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \|M\| = \max \{ |[M]_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n \} ;$$
- $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;

— si $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$, on dit que ce n -uplet est croissant si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$(i \leq j) \implies (u_i \leq u_j) ;$$

— si $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket ; u_i = u_{i_0}\}$;

— enfin $\text{Diag}((u_i)_{1 \leq i \leq n})$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [D]_{i,i} = u_i$$

on pourra noter cet élément en extension $D = \text{Diag}(u_1, \dots, u_n)$.

Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall \sigma \in B_n, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}.$$

1 ▷ Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma) \omega(\sigma')$.

2 ▷ Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷ Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\text{Diag}((d_i)_{1 \leq i \leq n}) \omega(\sigma) = \omega(\sigma) \text{Diag}((d_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}).$$

4 ▷ En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,

i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D' .

ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = {}^t M D M$.

Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

5 ▷ Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega.$$

6 ▷ Pour tout $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(s_i) = f(s_i).$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega \quad \text{et} \quad S = {}^t\Omega' \operatorname{Diag}((s'_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega',$$

avec $\Omega, \Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq n}, (s'_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$.

7 ▷ Montrer que l'on a alors :

$${}^t\Omega' \operatorname{Diag}((f(s'_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega' = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((f(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega,$$

puis que ${}^t\Omega \operatorname{Diag}((f(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall S \in S_n(I), u(\varphi)(S) = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((\varphi(s_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega,$$

où $S = {}^t\Omega \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{Diag}((s_i)_{1 \leq i \leq n})$ avec $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$, tel que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\operatorname{Tr} \circ u$.

8 ▷ Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n)$.

9 ▷ Étudier l'injectivité et la surjectivité de u .

10 ▷ On suppose que f est polynomiale; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$.

Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

11 ▷ Démontrer que, si $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction φ , alors les suites $(u(\varphi_k))_{k \in \mathbf{N}}$ et $(v(\varphi_k))_{k \in \mathbf{N}}$ convergent simplement sur $S_n(I)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur $S_n(I)$ si l'on suppose que $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur I ?

Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbf{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

12 ▷ On note $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}); {}^t X X = 1\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\min(\text{Sp}(S)) = \min \{ {}^t X S X; X \in \Sigma \} \text{ et } \max(\text{Sp}(S)) = \max \{ {}^t X S X; X \in \Sigma \}.$$

13 ▷ Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$ et que l'application ρ , de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ associe

$$\max \{ |\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(M) \},$$

est une norme sur $S_n(\mathbf{R})$.

Remarques:

✓ Ce D.M. est tiré de l'épreuve Math II NP du concours Mines - Ponts 2021, donnée au concours blanc en NP- NP* le jeudi 6/2/2025.

4 ♥ Une partie A d'un ev est convexe si $\forall (\vec{a}, \vec{b}) \in A^2$, $\forall t \in [0,1]$, $t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \in A$. (Cette définition sera donnée dans le chapitre "calcul différentiel" à venir.)

3/ Dans la suite de l'épreuve (q. 14 à 19), il est question de compacité (voir l'annexe B du cours à l'entrée).