

D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1. On fait l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce indéfiniment, qui tombe sur *Pile* avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et sur *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$.

Soit un entier naturel $r \geq 1$. On note T le temps d'attente du premier *Pile* et X le temps d'attente du r -ième *Pile*. Par exemple : $T(FFPFP \dots) = 3$ et, si $r = 2$, alors $X(FFPFP \dots) = 5$.

1. Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T ? Quelle est, pour chaque $n \in T(\Omega)$, la probabilité $P(T = n)$? Que valent l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$?
2. Soit $n \geq r \geq 1$. Soient A l'événement « La pièce est tombée $r - 1$ fois sur *Pile* au cours des $n - 1$ premiers lancers ». Calculer la probabilité $P(A)$.
3. En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = n)$.
4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$ et calculer, pour $x \in]-R, +R[$, la somme $\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$.
5. Montrer, par le calcul, que la somme $\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n)$ vaut bien 1. Qu'en déduire?
6. Montrer que, pour tout $x \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$, $\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n)x^n = \left(\frac{px}{1-qx}\right)^r$.
7. Montrer que la variable aléatoire X est d'espérance finie et calculer cette espérance $E(X)$.
8. Montrer que la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie et que $V(X) = \frac{rq}{p^2}$.

Exercice 2. 1. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$,

$$\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\frac{\pi}{2}[$,

$$\tan^{(n)}(x) \geq 0.$$

3. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral et ses hypothèses pour une fonction f sur un segment $[a, b]$.

4. Soit, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer que la série $\sum a_k x^k$ converge pour tout $x \in [0, +\frac{\pi}{2}[$.

5. Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est définie au moins sur $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

6. Calculer a_0 et a_1 . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$,

$$S'(x) = 1 + S^2(x).$$

8. Montrer que la fonction \tan est développable en série entière sur $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3 (tiré de MINES-PONTS - 2017 - MP - MATH 1).

Soit I le segment $[-1, +1]$. Soient E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de I vers \mathbb{R} et E_1 le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ formé des fonctions de E qui sont de classe \mathcal{C}^1 .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$.

(a) Montrer que la suite numérique $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

(b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre W_{n+2} et W_n . En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

(c) Montrer que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2. Si $f \in E$, on définit la fonction $u(f)$ par :

$$\forall x \in I, u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t)) dt.$$

On admettra que la fonction $u(f)$ est continue sur I et que u est donc un endomorphisme de E .

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ est un vecteur propre de u . (Par convention, $f_0(x) = 1$ pour tout $x \in I$.)

(b) Si $f \in E_1$, on définit la fonction $v(f)$ par :

$$\forall x \in I, v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin(t)) dt.$$

Montrer que v est une application linéaire de E_1 vers E . Et calculer $v(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On munit l'espace vectoriel E de la norme $\|\cdot\|$ définie pour tout $f \in E$ par :

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

(a) Montrer que l'endomorphisme u est une application continue de $(E, \|\cdot\|)$ vers $(E, \|\cdot\|)$.

(b) Montrer que l'application v n'est pas continue de $(E_1, \|\cdot\|)$ vers $(E, \|\cdot\|)$.

4. Soit D l'ensemble des fonctions de E qui sont développables en série entière. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière d'une fonction $f \in D$. Montrer que D est stable par u . Quels sont les coefficients du développement en série entière de $u(f)$?

Exercice 4. On veut prouver que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{C})$ et, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{pp}(\mathbb{C})$:

$$\|A^k\|^{1/k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\} \quad (\heartsuit)$$

On note :

- p un entier naturel non nul ;
- \mathcal{M}_p l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{pp}(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes ;
- pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p$, le réel

$$r(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

appelé le **rayon spectral** de la matrice A .

1. Soit x un réel strictement positif. Étudier $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{1/k}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_p$.

(a) Justifier l'existence de $r(A)$.

(b) Montrer que $r(A) = 0$ si, et seulement si, la matrice A est nilpotente.

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur \mathcal{M}_p , autrement dit elle vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

(a) Soient $A \in \mathcal{M}_p$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Montrer qu'il existe une matrice non nulle $B \in \mathcal{M}_p$ telle que $AB = \lambda B$. En déduire que :

$$r(A) \leq \|A\|$$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_p$ telle que $\|A\| < 1$. Montrer successivement que :

i. la matrice $I_p - A$ est inversible.

ii. la suite (A^k) converge vers la matrice nulle.

iii. la suite (C_k) , définie par $C_k = I_p + A + \dots + A^k$, converge et calculer sa limite.

(On pourra calculer le produit $(I_p - A)C_k$.)

(c) Soient A et B deux matrices semblables de \mathcal{M}_p .

i. Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\gamma} \|A^k\| \leq \|B^k\| \leq \gamma \|A^k\|$$

ii. En déduire que, si la propriété (\heartsuit) est vraie pour A , alors elle l'est encore pour B .

4. Dans cette question, on choisit la norme définie sur \mathcal{M}_p par :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p, \quad \|A\| = p \times \max_{1 \leq i, j \leq p} |a_{i,j}|$$

(a) Montrer que cette norme est sous-multiplicative.

(b) Montrer que le résultat (\heartsuit) est vrai lorsque la matrice A est diagonale, puis lorsque A est diagonalisable.

(c) Soient $T \in \mathcal{M}_p$ une matrice triangulaire supérieure, dont tous les termes diagonaux valent 1, et la matrice $J = T - I_p$. Montrer successivement que :

i. $J^p = 0$.

ii. Il existe un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall k \geq p, \quad p \leq \|T^k\| \leq M \cdot k^{p-1}$$

iii. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k} = 1$.

(d) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{R})$ deux matrices telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad |a_{i,j}| \leq b_{i,j}$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \|A^k\| \leq \|B^k\|$$

(e) Montrer que la propriété (\heartsuit) est vraie si la matrice A est triangulaire supérieure. (Dans le cas où $r(A) > 0$, on pourra utiliser la matrice $A' = \frac{1}{r(A)} A$).

(f) Montrer que la propriété (\heartsuit) est vraie pour toute matrice de \mathcal{M}_p .

5. Montrer que la propriété (\heartsuit) est vraie pour toute matrice A de \mathcal{M}_p et pour toute norme sur \mathcal{M}_p .