CORRIGÉ DU D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1. On fait l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce indéfiniment, qui tombe sur *Pile* avec une probabilité $p \in]0,1[$ et sur *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$.

Soit un entier naturel $r \geq 1$. On note T le temps d'attente du premier *Pile* et X le temps d'attente du $r-$ième *Pile*. Par exemple : $T(FFPFP\cdots) = 3$ et, si $r = 2$, alors $X(FFPFP\cdots) = 5$.

1. Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T ? Quelle est, pour chaque $n \in T(\Omega)$, la probabilité $P(T = n)$? Que valent l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$?
2. Soit $n \geq r \geq 1$. Soient A l'événement « La pièce est tombée $r - 1$ fois sur *Pile* au cours des $n - 1$ premiers lancers ». Calculer la probabilité $P(A)$.
3. En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = n)$.
4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$ et calculer, pour $x \in]-R, +R[$, la somme $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$.
5. Montrer, par le calcul, que la somme $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n)$ vaut bien 1. Qu'en déduire ?
6. Montrer que, pour tout $x \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$, $\quad \displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n) x^n = \left(\frac{px}{1 - qx}\right)^r$.
7. Montrer que la variable aléatoire X est d'espérance finie et calculer cette espérance $E(X)$.
8. Montrer que la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie et que $V(X) = \dfrac{rq}{p^2}$.

---

1. La variable aléatoire T suit une loi géométrique de paramètre p (car les lancers sont des épreuves de Bernoulli qu'on suppose indépendantes et T est le temps d'attente du premier *Pile*), d'où :
$$T(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad P(T = n) = pq^{n-1}, \quad E(T) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{q}{p^2}.$$
2. Les $n - 1$ lancers sont des épreuves de Bernoulli indépendantes et l'événement A est réalisé *ssi* on obtient $r - 1$ *Pile* parmi les $n - 1$ lancers. D'après la loi binomiale, $P(A) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{(n-1)-(r-1)} = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{n-r}$.
3. Soit B l'événement « La pièce tombe sur *Pile* au $n-$ième lancer » : $P(B) = p$.
Si $n < r$, alors l'événement $(X = n)$ est impossibe, d'où $P(X = n) = 0$.
Soit $n \geq r$. L'événement $(X = n)$ est égal à $A \cap B$. Les événements A et B sont indépendants, d'où
$$P(X = n) = P(A) \cdot P(B) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}.$$

4. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$. On peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. Dérivons $r-1$ fois terme à terme la série entière $\sum x^n$, dont le rayon de convergence vaut $R = 1$:

   $\forall x \in]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. D'où : le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$ est encore $R = 1$ et

   $$\forall x \in]-1,+1[,\ \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

   (Ne pas oublier de le démontrer par récurrence sur r.)

5. $\sum_{n=r}^{\infty} P(X=n) = p^r \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} q^{n-r} = p^r \frac{1}{(1-q)^r}$ d'après la question précédente car $q \in]-1,+1[$.

   Donc $\sum_{n=r}^{\infty} P(X=n) = 1$. La probabilité de l'événement « On n'obtiendra jamais r *Pile* » est donc nulle, autrement dit cet événement est presque impossible, autrement dit $(X=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi complet d'événements, autrement dit les événements $(X=n)$ ont une union disjointe et presque certaine.

6. Soit $x \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$: $G(x) = \sum_{n=r}^{\infty} P(X=n)x^n = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} x^n = (px)^r \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} (qx)^{n-r}$.

   Donc $G(x) = \left(\frac{px}{1-qx}\right)^r$ d'après (4).

   Ce calcul est valable si $qx \in]-1,+1[$, toujours d'après (4), c'est-à-dire si $x \in]-\frac{1}{q}, +\frac{1}{q}[$. On reconnaît que : la fonction G est la fonction génératrice de la variable aléatoire X.

7. La fonction G est dérivable sur l'intervalle $]-\frac{1}{q}, +\frac{1}{q}[$ et, pour tout x dans cet intervalle,

   $$G'(x) = r \cdot \left(\frac{px}{1-qx}\right)^{r-1} \cdot \frac{p(1-qx)+pqx}{(1-qx)^2} = \frac{rp}{(1-qx)^2} \cdot \left(\frac{px}{1-qx}\right)^{r-1}.$$

   Ceci est valable pour tout $x \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$, donc en particulier pour $x=1$. La fonction G est dérivable en 1, donc la variable aléatoire X est d'espérance finie et $E(X) = G'(1) = \frac{r}{p}$ ▷ **proposition 32 du chapitre X**.

8. La fonction G est deux fois dérivable sur l'intervalle $]-\frac{1}{q}, +\frac{1}{q}[$ et, pour tout x dans cet intervalle,

   $$G''(x) = rp \cdot \frac{d}{dx}\left[(px)^{r-1} \cdot (1-qx)^{-r-1}\right] = rp \cdot \left[(px)^{r-12} \cdot (1-qx)^{-r-2} \cdot [2pqx + p(r-1)]\right].$$

   Ceci est valable pour $x=1$ car $1 \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$. La fonction G est deux fois dérivable en 1, donc la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie et $V(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = \frac{rq}{p^2}$ ▷ **proposition 32 du chapitre X**.

Exercice 2.

1. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$,

   $$\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$,

   $$\tan^{(n)}(x) \geq 0.$$

3. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral et ses hypothèses pour une fonction f sur un segment $[a,b]$.

4. Soit, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer que la série $\sum a_k x^k$ converge pour tout $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$.

5. Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est définie au moins sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

6. Calculer a_0 et a_1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$,

$$S'(x) = 1 + S^2(x).$$

8. Montrer que la fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

---

1. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan^{(n+1)}(x) = \left(\tan'\right)^{(n)}(x) = (1+\tan^2)^{(n)}(x) = (\tan \times \tan)^{(n)}(x).$$

On utilise la formule de Leibniz pour dériver n fois ce produit :

$$\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

2. On montre la propriété par récurrence forte sur n :
   - elle est vraie pour $n = 0$ car $\tan(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$ et elle est aussi vraie pour $n = 1$ car $\tan' = 1 + \tan^2$;
   - supposons que la propriété est vraie de 0 à $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de récurrence de la question précédente, elle est encore vraie pour $n + 1$.

   Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a, b]$, alors :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(a,b), \quad \text{où } R_n(a,b) = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

4. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à $f = \tan$ sur un segment $[0, x] \subset \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + R_n(0,x) \quad \text{où } R_n(0,x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \tan^{(n+1)}(t)\, dt \text{ est positif d'après la question 2.}$$

   La suite numérique $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ des sommes partielles est :
   - croissante car c'est une somme de termes positifs d'après la question 2 ;
   - majorée par $\tan(x)$ car le reste $R_n(0, x)$ est positif.

   D'où la suite $S_n(x)$ est convergente. Donc la série numérique $\sum a_k x^k$ est convergente pour tout $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$.
5. D'après la question 4, la série entière $\sum a_k x^k$ converge pour tout $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$. Son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Elle converge donc au moins sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Autrement dit, la fonction S est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.
6. $a_0 = \tan(0) = 0$ et $a_1 = 1+\tan^2(0) = 1$. D'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(0) \tan^{(n-k)}(0)$.

   D'où $(n+1)!a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! a_k \, (n-k)! a_{n-k}$. Donc $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
7. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$:
   - on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \;;$$

   - par produit de Cauchy,

$$S^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

   D'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, \; S'(x) = 1 + S^2(x) \quad &\iff \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, \; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &\iff \quad \begin{cases} a_1 = 1 + c_0 \\ \forall n \geq 1, \; (n+1) a_{n+1} = c_n \end{cases} \quad \text{par unicité du DSE} \end{aligned}$$

   La première équation est vérifiée car $a_0 = c_0 = 0$ et $a_1 = 1$. La seconde équation est aussi vérifiée pour chaque $n \geq 1$ d'après la question 6. Donc $S'(x) = 1 + S^2(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

8.

$$S'(x) = 1 + S^2(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{S'(x)}{1+S^2(x)} = 1$$
$$\Longrightarrow \quad \arctan(S(x)) - \arctan(S(0)) = x - 0.$$

Or $S(0) = a_0 = 0$, d'où : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(S(x)) = x$. Donc

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, \ S(x) = \tan(x).$$

On en déduit que la fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Son *DSE* est : $\tan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 (tiré de Mines-Ponts - 2017 - MP - Math 1)**.**

Soit I le segment $[-1,+1]$. Soient E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$ et E_1 le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ formé des fonctions de E qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt$.
   (a) Montrer que la suite numérique $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
   (b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre W_{n+2} et W_n. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
   (c) Montrer que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
2. Si $f \in E$, on définit la fonction $u(f)$ par :
   $$\forall x \in I, \ u(f)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x\sin(t)) \, dt.$$
   On admettra que la fonction $u(f)$ est continue sur I et que u est donc un endomorphisme de E.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_n : I \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^n$ est un vecteur propre de u. (Par convention, $f_0(x) = 1$ pour tout $x \in I$.)
   (b) Si $f \in E_1$, on définit la fonction $v(f)$ par :
   $$\forall x \in I, \ v(f)(x) = f(0) + x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t)) \, dt.$$
   Montrer que v est une application linéaire de E_1 vers E. Et calculer $v(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On munit l'espace vectoriel E de la norme $\|\cdot\|$ définie pour tout $f \in E$ par :
   $$\|f\| = \max_{x\in I} |f(x)|.$$
   (a) Montrer que l'endomorphisme u est une application continue de $(E, \|\cdot\|)$ vers $(E, \|\cdot\|)$.
   (b) Montrer que l'application v n'est pas continue de $(E_1, \|\cdot\|)$ vers $(E, \|\cdot\|)$.
4. Soit D l'ensemble des fonctions de E qui sont développables en série entière. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière d'une fonction $f \in D$. Montrer que D est stable par u. Quels sont les coefficients du développement en série entière de $u(f)$?

1. (a) Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin t \leq 1$. Doù $0 \leq \sin^n t \leq \sin^{n-1} t$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq W_n \leq W_{n-1}$. Donc la suite (W_n) est décroissante. Elle est strictement positive car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[0, \pi/2] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sin^n t$ est continue, positive et n'est pas la fonction nulle.

   (b) Soit $n \geq 2$. On intègre par parties :

   $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} uv' = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v$ car les fonctions $u\ :\ t \mapsto (\sin t)^{n-1}$ et $v\ :\ t \mapsto -\cos t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. D'où $W_n = \left[-(\sin t)^{n-1} \cos t\right]_0^{\pi/2} + (n-1) \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n-2} (\cos t)^2\, dt$. Or le terme entre crochets est nul.

   Donc $W_n = (n-1) \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n-2} (\cos t)^2\, dt$. De plus, $W_{n-2} - W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n-2}\, dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\, dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n-2} (1 - \sin^2 t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n-2} (\cos t)^2\, dt$.

   D'où $W_{n-2} - W_n = \frac{1}{n-1} W_n$, donc $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

   D'où $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$. Donc la suite (nW_nW_{n-1}) est constante. Et cette constante est égale à W_1W_0. Or $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dt = \pi/2$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\, dt = 1$. Donc la suite (nW_nW_{n-1}) est constamment égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

   (c) La suite (W_n) est décroissante, d'où $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$. D'où $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leq \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$ en divisant par W_{n-1} qui est strictement positif.

   De cet encadrement, on tire que $\dfrac{W_n}{W_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ grâce au théorème des gendarmes. D'où $W_n \sim W_{n-1}$. La suite (nW_nW_{n-1}) est donc constante, égale à $\dfrac{\pi}{2}$ et équivalente à nW_n^2. D'où $nW_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$. Donc $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ car la suite (W_n) est positive.

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$: $u(f_n)(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} (x \sin t)^n\, dt = \dfrac{2}{\pi} W_n x^n = \dfrac{2}{\pi} W_n f_n(x)$, d'où $u(f_n) = \frac{2}{\pi} W_n f_n$. De plus la fonction f_n n'est pas nulle. Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\frac{2}{\pi} W_n$.

   (b) Soit $f \in E_1$, alors $f' \in E$. Par suite $v(f) \in E$ car $v(f) = f(0) + \frac{\pi}{2} x u(f')$ et il est admis que la fonction $u(f')$ est continue car f' l'est. De plus, pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E_1^2$, pour tout $x \in I$, $v(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(0) + \frac{\pi}{2} x u(\alpha f' + \beta g')'(x) = \alpha f(0) + \beta g(0) + \alpha u(f')(x) + \beta u(g')(x)$ par linéarité de u. D'où $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$, donc v est linéaire.

   D'une part, $v(f_0) = 1 = 1 f_0$. D'autre part, soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$: $v(f_n)(x) = 0^n + x \displaystyle\int_0^{\pi/2} n (x \sin t)^{n-1}\, dt = nW_{n-1} x^n = nW_{n-1} f_n(x)$, d'où $v(f_n) = nW_{n-1} f_n$.

3. (a) L'application u est linéaire. Elle sera continue si, et seulement si, il existe un réel K tel que $\forall f \in E,\ \|u(f)\| \leq K \|f\|$. Pour tout $x \in I$, $|u(f)(x)| = \left|\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t))\, dt\right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(x \sin(t))|\ dt$ d'après l'inégalité triangulaire. Or $\forall (x, t) \in I \times [0, \pi/2],\ |f(x \sin(t))| \leq \|f\|$. D'où $\forall x \in I,\ |u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} \|f\|$ qui est un majorant. Or le maximum est le plus petit majorant, d'où $\|u(f)\| \leq \|f\|$. Donc l'application u est continue.

   (b) L'application v est linéaire. Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel K tel que $\forall f \in E_1,\ \|v(f)\| \leq K \|f\|$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|v(f_n)\| \leq K \|f_n\|$. D'où $nW_{n-1} \|f_n\| \leq K \|f_n\|$. En divisant par $\|f_n\|$ qui est strictement positif, $nW_{n-1} \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est absurde car $nW_{n-1} \sim n \sqrt{\frac{\pi}{2n-2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. L'application v n'est donc pas continue.

4. La fonction f est DSE, donc $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout x appartenant à un intervalle $]-r, +r[$. Soit $(x, t) \in\ ]-r, +r[\times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors $|x \sin t| < r$, d'où

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sin^n t \right) dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} a_n x^n \sin^n t \right) dt.$$

D'où, sous réserve qu'on puisse intégrer terme à terme,

$$u(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2a_n}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n W_n}{\pi} x^n,$$

ce qui montre que la fonction $u(f)$ est DSE sur $]-r, +r[$. Pour justifier l'intégration terme à terme, il suffit de montrer que la série numérique $\sum \int_0^{\pi/2} \left|\frac{2}{\pi} a_n x^n \sin^n t\right|\ dt$ converge. C'est le cas car $0 \leq \int_0^{\pi/2} \left|\frac{2}{\pi} a_n x^n \sin^n t\right|\ dt \leq |a_n x^n|$ et la série $\sum |a_n x^n|$ converge.

Exercice 4. On veut prouver que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{pp}(\mathbb{C})$ et, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{M}_{pp}(\mathbb{C})$:

$$\|A^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\} \qquad (\heartsuit)$$

On note :

- p un entier naturel non nul ;
- $\mathscr{M}_p$ l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{pp}(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes ;
- pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p$, le réel

$$r(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}$$

appelé le **rayon spectral** de la matrice A.

1. Soit x un réel strictement positif. Étudier $\lim\limits_{k\to\infty} x^{1/k}$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_p$.
   (a) Justifier l'existence de $r(A)$.
   (b) Montrer que $r(A) = 0$ si, et seulement si, la matrice A est nilpotente.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_p$, autrement dit elle vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_p^2, \qquad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

   (a) Soient $A \in \mathscr{M}_p$ et $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$. Montrer qu'il existe une matrice non nulle $B \in \mathscr{M}_p$ telle que $AB = \lambda B$. En déduire que :

$$r(A) \leq \|A\|$$

   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_p$ telle que $\|A\| < 1$. Montrer successivement que :
      i. la matrice $I_p - A$ est inversible.
      ii. la suite (A^k) converge vers la matrice nulle.
      iii. la suite (C_k), définie par $C_k = I_p + A + \cdots + A^k$, converge et calculer sa limite.
      (On pourra calculer le produit $(I_p - A)C_k$.)
   (c) Soient A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_p$.
      i. Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{\gamma}\|A^k\| \leq \|B^k\| \leq \gamma\|A^k\|$$

      ii. En déduire que, si la propriété $(\heartsuit)$ est vraie pour A, alors elle l'est encore pour B.
4. Dans cette question, on choisit la norme définie sur $\mathscr{M}_p$ par :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_p, \qquad \|A\| = p \times \max_{1\leq i,j\leq p} |a_{i,j}|$$

   (a) Montrer que cette norme est sous-multiplicative.
   (b) Montrer que le résultat $(\heartsuit)$ est vrai lorsque la matrice A est diagonale, puis lorsque A est diagonalisable.
   (c) Soient $T \in \mathscr{M}_p$ une matrice triangulaire supérieure, dont tous les termes diagonaux valent 1, et la matrice $J = T - I_p$. Montrer successivement que :
      i. $J^p = 0$.
      ii. Il existe un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall k \geq p, \qquad p \leq \|T^k\| \leq M \cdot k^{p-1}$$

iii. $\lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} = 1$.

(d) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_p$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{pp}(\mathbb{R})$ deux matrices telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad |a_{i,j}| \leq b_{i,j}$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \|A^k\| \leq \|B^k\|$$

(e) Montrer que la propriété ($\heartsuit$) est vraie si la matrice A est triangulaire supérieure. (Dans le cas où $r(A) > 0$, on pourra utiliser la matrice $A' = \frac{1}{r(A)} A$).

(f) Montrer que la propriété ($\heartsuit$) est vraie pour toute matrice de $\mathscr{M}_p$.

5. Montrer que la propriété ($\heartsuit$) est vraie pour toute matrice A de $\mathscr{M}_p$ et pour toute norme sur $\mathscr{M}_p$.

---

1. Soit $x > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x^{1/k} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{k}}$.

   Comme $\frac{\ln x}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et que l'exponentielle est continue en 0, on obtient $\boxed{x^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1.}$

2. Soit $A \in \mathscr{M}_p$.

   (a) Comme A est à coefficients complexes, son polynôme caractéristique (de degré $n \geq 1$) est scindé sur $\mathbb{C}$, donc admet au moins une racine d'après d'Alembert-Gauss, et au plus n. Par conséquent, l'ensemble $\{|\lambda|, \ \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}$ est une partie finie et non vide de $\mathbb{R}$, donc admet un maximum $r(A)$. D'où $\boxed{\text{l'existence de } r(A).}$

   (b) Procédons par double implication :

   — Si $r(A) = 0$, alors $\mathrm{Sp(A)} = \{0\}$ et, selon le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(X) = (X-0)^p$ est annulateur de A, c'est-à-dire que $A^p = 0$.

   — S'il existe $n \geq 1$ tel que $A^n = 0$, alors X^n est un polynôme annulateur de la matrice A, or le spectre est inclus dans l'ensemble des racines, donc $\mathrm{Sp(A)} \subset \{0\}$. Comme le spectre complexe n'est pas vide, $\mathrm{Sp(A)} = \{0\}$ et donc $r(A) = 0$.

   Ainsi, $\boxed{r(A) = 0 \text{ si, et seulement si, il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } A^n = 0.}$

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_p$.

   (a) Soit $X \neq 0$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Notons $B \in \mathscr{M}_p$, la matrice dont toutes les colonnes sont égales à X. Alors la matrice $AB \in \mathscr{M}_p$ a toutes ses colonnes égales à $AX = \lambda X$. Donc $\boxed{AB = \lambda B \text{ et } B \neq 0,}$

   puisque $X \neq 0$.
   Comme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, $|\lambda| \cdot \|B\| = \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. La matrice B étant non nulle, on peut diviser par $\|B\| > 0$ et l'inégalité précédente donne $|\lambda| \leq \|A\|$ qui est un majorant du spectre. Or la borne supérieure (ou le maximum ici) est le plus petit majorant, donc $\boxed{r(A) \leq \|A\|.}$

   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_p$ telle que $\|A\| < 1$.

   i. Comme $r(A) \leq \|A\| < 1$, 1 n'est pas une valeur propre de A, et donc $\boxed{I_p - A \text{ est inversible.}}$

ii. La norme $\|\cdot\|$ étant sous-multiplicative, une récurrence donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k$$

La suite géométrique réelle $(\|A\|^k)_{k\geq 1}$ est de raison $\|A\| < 1$, donc converge vers 0. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\|A^k - 0\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{la suite } (A^k)_{k\geq 1} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$$

iii. Pour $k \geq 1$, calculons :

$$(I_p - A)C_k = C_k - AC_k = (I_p + A + \cdots + A^k) - (A + A^2 + \cdots + A^{k+1}) = I_p - A^{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} I_p$$

D'une part la matrice $I_p - A$ est inversible, d'autre part l'application $M \mapsto (I_p - A)^{-1}M$ est continue car linéaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_p$ de dimension finie, d'où :

$$C_k = (I_p - A)^{-1} \times (I_p - A)C_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (I_p - A)^{-1} \times I_p.$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (C_k) \text{ converge vers } (I_p - A)^{-1}.}$

(c) Soient A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_p$.

i. A et B étant semblables, il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_p$ telle que $B = P^{-1}AP$ et donc, pour tout $k \geq 1$, $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$. La norme $\|\cdot\|$ étant sous-multiplicative,

$$\|B^k\| = \|P^{-1}A^kP\| \leq \|P^{-1}\| \cdot \|A^k\| \cdot \|P\|.$$

En posant $\gamma = \|P^{-1}\|\cdot\|P\| > 0$, car P et P^{-1} sont non nulles, on obtient : $\boxed{\|B^k\| \leq \gamma\|A^k\|, \text{ pour tout } k \geq 1.}$

De même, comme $A^k = PB^kP^{-1}$, $\|A^k\| \leq \gamma\|B^k\|$, et donc $\boxed{\frac{1}{\gamma}\|A^k\| \leq \|B^k\|, \text{ pour tout } k \geq 1.}$

ii. Supposons que $\|A^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r(A)$. L'encadrement précédent fournit, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{1/k}$ (à $k \geq 1$ fixé) sur $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{\gamma^{1/k}}\|A^k\|^{1/k} \leq \|B^k\|^{1/k} \leq \gamma^{1/k}\|A^k\|^{1/k}$$

Or $\gamma^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ d'après la question 1, et $\|A^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r(A)$. Donc, par le théorème des gendarmes, $\|B^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r(A)$. Mais les matrices A et B sont semblables, donc ont le même spectre, ce qui implique que $r(A) = r(B)$. On a alors obtenu que $\|B^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r(B)$, ce qui signifie que $\boxed{\text{le résultat } (\heartsuit) \text{ est encore vrai pour } B.}$

4. Dans cette question, on choisit la norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathscr{M}_p$ par $\|A\| = p \max_{1\leq i,j\leq p} |a_{i,j}|$.

(a) Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ dans $\mathscr{M}_p$. En notant $C = AB = (c_{i,j})$, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad |c_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |a_{i,k}|\ |b_{k,j}| \leq \frac{\|A\|}{p}\frac{\|B\|}{p}\sum_{k=1}^{p} 1 = \frac{1}{p}\|A\|\|B\|$$

qui est un majorant. Le maximum étant le plus petit majorant, $\|C\| = \|AB\| \leq p \times \frac{1}{p}\|A\|\,\|B\|$, c'est-à-dire $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la norme } \|\cdot\| \text{ est sous-multiplicative.}}$

(b) Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ une matrice diagonale de $\mathscr{M}_p$. Il existe $i_0 \in [\![1,p]\!]$, tel que $r(A) = |\lambda_{i_0}| = \frac{\|A\|}{p}$. Pour tout $k \geq 1$, $A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_p^k)$ d'où $\|A^k\| = p|\lambda_{i_0}^k| = p|\lambda_{i_0}|^k$, et donc :

$$\|A^k\|^{1/k} = p^{1/k}|\lambda_{i_0}| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \times |\lambda_{i_0}| = |\lambda_{i_0}| = r(A)$$

Donc $\boxed{\text{le résultat } (\heartsuit) \text{ est vrai lorsque la matrice } A \text{ est diagonale.}}$

Comme la norme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, si A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale et, selon la question 3-c-ii, $\boxed{\text{le résultat } (\heartsuit) \text{ est encore vrai pour toute matrice diagonalisable.}}$

(c) Soient $T \in \mathscr{M}_p$ une matrice triangulaire supérieure, dont tous les termes diagonaux valent 1, et $J = T - I_p$.

i. J est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, qui sont tous nuls. Par conséquent, son polynôme caractéristique s'écrit $\chi_J(X) = (X-0)^p$ et, selon le théoeème de Cayley-Hamilton, il est annulateur de J. Autrement dit, $\boxed{J^p = 0.}$

ii. Comme J et I_p commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall k \geq p, \quad T^k = (J + I_p)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J^i = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} J^i \quad \text{car} \quad J^i = 0,\ \forall i \geq p.$$

Donc, par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme :

$$\|T^k\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} \|J^i\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{k^i}{i!} \|J^i\| \leq k^{p-1} \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} \|J^i\|}_{=\ M \geq 0}$$

Et, comme les coefficients diagonaux de T^k valent 1, $\boxed{p \leq \|T^k\| \leq M \cdot k^{p-1}, \text{ pour tout } k \geq p.}$

iii. L'encadrement précédent entraîne :

$$\forall k \geq p, \quad p^{1/k} \leq \|T^k\|^{1/k} \leq M^{1/k} \cdot k^{\frac{p-1}{k}}.$$

Or, d'après la question 1, $p^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $M^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $k^{\frac{p-1}{k}} = \mathrm{e}^{(p-1)\frac{\ln k}{k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$, puisque $\frac{\ln k}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On obtient donc, par le théorème des gendarmes, que $\boxed{\|T^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1.}$

(d) Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ telles que, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leq b_{i,j}$.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$ et $B^k = (b_{i,j}^{(k)})$ et montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $|a_{i,j}^{(k)}| \leq b_{i,j}^{(k)}$, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

— L'inégalité est vraie pour $k = 1$ par hypothèse sur A et B.

— Supposons qu'elle soit vraie pour k fixé dans $\mathbb{N}^*$. Alors, par inégalité triangulaire :

$$|a_{i,j}^{(k+1)}| = \left| \sum_{\ell=1}^{p} a_{i,\ell}^{(k)} a_{\ell,j} \right| \leq \sum_{\ell=1}^{p} |a_{i,\ell}^{(k)}|\,|a_{\ell,j}| \leq \sum_{\ell=1}^{p} b_{i,\ell}^{(k)} b_{\ell,j} = b_{i,j}^{(k+1)}$$

Ce qui achève la récurrence. Puis, parce que le maximum est un majorant,

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!], \quad p\,|a_{i,j}^{(k)}| \leq \|B^k\|$$

et enfin $\|A^k\| \leq \|B^k\|$ car le maximum est le plus petit majorant. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \|A^k\| \leq \|B^k\|}$.

(e) Soit $A \in \mathscr{M}_p$ triangulaire supérieure.

— Si $r(A) = 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = 0$ et donc, pour tout $k \geq n$, $\|A^k\|^{1/k} = 0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 = r(A)$.

— Si $r(A) > 0$, alors la matrice $A' = \frac{1}{r(A)} A$ est encore triangulaire supérieure et a tous ses coefficients diagonaux de module inférieur ou égal à 1. Soit T la matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont égaux à 1 et ceux du triangle supérieur égaux au module de ceux de A'. Les matrices A' et T satisfont les hypothèses de la question précédente et alors :

$$\forall k \geq 1, \quad p \leq \|A'^k\| \leq \|T^k\| \qquad \text{puis} \qquad p^{1/k} \leq \|A'^k\|^{1/k} \leq \|T^k\|^{1/k}$$

À l'aide des questions 1 et 4-c-iii, on déduit du théorème des gendarmes que $\|A'^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et, par homogénéité de la norme :

$$\|A^k\|^{1/k} = \left\|[r(A)]^k A'^k\right\|^{1/k} = r(A)\|A'^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r(A) \times 1 = r(A)$$

Ainsi, $\boxed{\text{le résultat } (\heartsuit) \text{ est vrai pour toute matrice triangulaire supérieure.}}$

(f) Dans $\mathscr{M}_p$, toute matrice est trigonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure. En utilisant les questions 3-c-ii et 4-e, on conclut que $\boxed{\text{le résultat } (\heartsuit) \text{ est vrai pour toute matrice de } \mathscr{M}_p.}$

5. Soit N une norme sur $\mathscr{M}_p$. Il existe alors $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_p, \qquad \alpha\|M\| \leq N(M) \leq \beta\|M\|$$

où $\|\cdot\|$ est la norme définie à la question 4. Alors, pour $A \in \mathscr{M}_p$,

$$\forall k \geq 1, \quad \alpha\|A^k\| \leq N(A^k) \leq \beta\|A^k\| \qquad \text{puis} \qquad \alpha^{1/k}\|A^k\|^{1/k} \leq [N(A^k)]^{1/k} \leq \beta^{1/k}\|A^k\|^{1/k}$$

Grâce à la question 4-f et au théorème des gendarmes, on conclut que $[N(A^k)]^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r(A)$.

Ainsi $\boxed{\text{le résultat } (\heartsuit) \text{ est vrai pour toute matrice } A \text{ de } \mathscr{M}_p \text{ et pour toute norme } N \text{ sur } \mathscr{M}_p.}$