# D.S. n$^{\text{o}}$ 5 de mathématiques

*Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.*

*Cet énoncé contient quatre exercices.*

*On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.*

*On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.*

---

**Exercice 1.** On fait l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce indéfiniment, qui tombe sur *Pile* avec une probabilité $p \in ]0, 1[$ et sur *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$.

Soit un entier naturel $r \geq 1$. On note $T$ le temps d'attente du premier *Pile* et $X$ le temps d'attente du $r-$ième *Pile*. Par exemple : $T(FFPFP\cdots) = 3$ et, si $r = 2$, alors $X(FFPFP\cdots) = 5$.

1. Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire $T$ ? Quelle est, pour chaque $n \in T(\Omega)$, la probabilité $P(T = n)$ ? Que valent l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ ?
2. Soit $n \geq r \geq 1$. Soient $A$ l'événement « La pièce est tombée $r - 1$ fois sur *Pile* au cours des $n - 1$ premiers lancers ». Calculer la probabilité $P(A)$.
3. En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = n)$.
4. Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$ et calculer, pour $x \in ]-R, +R[$, la somme $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$.
5. Montrer, par le calcul, que la somme $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n)$ vaut bien 1. Qu'en déduire ?
6. Montrer que, pour tout $x \in ]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$, $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n)x^n = \left(\frac{px}{1 - qx}\right)^r$.
7. Montrer que la variable aléatoire $X$ est d'espérance finie et calculer cette espérance $E(X)$.
8. Montrer que la variable aléatoire $X^2$ est d'espérance finie et que $V(X) = \dfrac{rq}{p^2}$.

**Exercice 2.** 1. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan^{(n)}(x) \geq 0.$$

3. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral et ses hypothèses pour une fonction $f$ sur un segment $[a, b]$.
4. Soit, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{\tan^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer que la série $\sum a_k x^k$ converge pour tout $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$.
5. Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est définie au moins sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.
6. Calculer $a_0$ et $a_1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$,

$$S'(x) = 1 + S^2(x).$$

8. Montrer que la fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.
9. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ ?

**Exercice 3** (tiré de Mines-Ponts - 2017 - MP - Math 1)**.**

Soit $I$ le segment $[-1, +1]$. Soient $E$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $I$ vers $\mathbb{R}$ et $E_1$ le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ formé des fonctions de $E$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n$ l'intégrale de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt$.
   (a) Montrer que la suite numérique $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
   (b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre $W_{n+2}$ et $W_n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

   (c) Montrer que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
2. Si $f \in E$, on définit la fonction $u(f)$ par :

$$\forall x \in I, \ u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t)) \, dt.$$

   On admettra que la fonction $u(f)$ est continue sur $I$ et que $u$ est donc un endomorphisme de $E$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_n : I \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^n$ est un vecteur propre de $u$. (Par convention, $f_0(x) = 1$ pour tout $x \in I$.)

(b) Si $f \in E_1$, on définit la fonction $v(f)$ par :

$$\forall x \in I,\ v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t))\, dt.$$

Montrer que $v$ est une application linéaire de $E_1$ vers $E$. Et calculer $v(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On munit l'espace vectoriel $E$ de la norme $\|\cdot\|$ définie pour tout $f \in E$ par :

$$\|f\| = \max_{x\in I} |f(x)|.$$

(a) Montrer que l'endomorphisme $u$ est une application continue de $(E, \|\cdot\|)$ vers $(E, \|\cdot\|)$.

(b) Montrer que l'application $v$ n'est pas continue de $(E_1, \|\cdot\|)$ vers $(E, \|\cdot\|)$.

(c) On munit $E_1$ de la norme $N : E_1 \to \mathbb{R},\ f \mapsto \|f\| + \|f'\|$. Montrer que l'application $v$ est continue de $(E_1, N)$ vers $(E, \|\cdot\|)$.

4. Soit $P$ l'ensemble des fonctions de $E_1$ qui sont polynomiales.

(a) Calculer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in P$.

(b) Soient $f \in E_1$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $p \in P$ telle que :

$$p(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad |f'(x) - p'(x)| \leq \varepsilon.$$

(c) En déduire que l'ensemble $P$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(E_1, N)$.

(d) Montrer que $u \circ v(f) = f$ pour tout $f \in E_1$.

(e) Montrer que : si $f$ est un vecteur propre de $v$, alors c'est aussi un vecteur propre de $u$.

5. Soit $D$ l'ensemble des fonctions de $E_1$ qui sont développables en série entière. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière d'une fonction $f \in D$.

(a) Montrer que $D$ est stable par $u$. Quels sont les coefficients du développement en série entière de $u(f)$ ?

(b) Montrer que $D$ est stable par $v$. Quels sont les coefficients du développement en série entière de $v(f)$ ?

**Exercice 4.** On veut prouver que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{pp}(\mathbb{C})$ et, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{M}_{pp}(\mathbb{C})$ :

$$\|A^k\|^{1/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\} \qquad (\heartsuit)$$

On note :

- $p$ un entier naturel non nul ;
- $\mathscr{M}_p$ l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{pp}(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre $p$ à coefficients complexes ;
- pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p$, le réel

$$r(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}$$

appelé le **rayon spectral** de la matrice $A$.

1. Soit $x$ un réel strictement positif. Étudier $\lim\limits_{k\to\infty} x^{1/k}$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_p$.

(a) Justifier l'existence de $r(A)$.

(b) Montrer que $r(A) = 0$ si, et seulement si, la matrice $A$ est nilpotente.

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_p$, autrement dit elle vérifie :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_p^2, \qquad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

   (a) Soient $A \in \mathscr{M}_p$ et $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$. Montrer qu'il existe une matrice non nulle $B \in \mathscr{M}_p$ telle que $AB = \lambda B$. En déduire que :

$$r(A) \leq \|A\|$$

   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_p$ telle que $\|A\| < 1$. Montrer successivement que :

      i. la matrice $I_p - A$ est inversible.

      ii. la suite $(A^k)$ converge vers la matrice nulle.

      iii. la suite $(C_k)$, définie par $C_k = I_p + A + \cdots + A^k$, converge et calculer sa limite. (On pourra calculer le produit $(I_p - A)C_k$.)

   (c) Soient $A$ et $B$ deux matrices semblables de $\mathscr{M}_p$.

      i. Montrer qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{\gamma}\|A^k\| \leq \|B^k\| \leq \gamma \|A^k\|$$

      ii. En déduire que, si la propriété ($\heartsuit$) est vraie pour $A$, alors elle l'est encore pour $B$.

4. Dans cette question, on choisit la norme définie sur $\mathscr{M}_p$ par :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_p, \qquad \|A\| = p \times \max_{1 \leq i,j \leq p} |a_{i,j}|$$

   (a) Montrer que cette norme est sous-multiplicative.

   (b) Montrer que le résultat ($\heartsuit$) est vrai lorsque la matrice $A$ est diagonale, puis lorsque $A$ est diagonalisable.

   (c) Soient $T \in \mathscr{M}_p$ une matrice triangulaire supérieure, dont tous les termes diagonaux valent 1, et la matrice $J = T - I_p$. Montrer successivement que :

      i. $J^p = 0$.

      ii. Il existe un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall k \geq p, \qquad p \leq \|T^k\| \leq M \cdot k^{p-1}$$

      iii. $\lim\limits_{k \to \infty} \|T^k\|^{1/k} = 1$.

   (d) Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_p$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{pp}(\mathbb{R})$ deux matrices telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad |a_{i,j}| \leq b_{i,j}$$

   Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \|A^k\| \leq \|B^k\|$$

   (e) Montrer que la propriété ($\heartsuit$) est vraie si la matrice $A$ est triangulaire supérieure. (Dans le cas où $r(A) > 0$, on pourra utiliser la matrice $A' = \frac{1}{r(A)}A$).

   (f) Montrer que la propriété ($\heartsuit$) est vraie pour toute matrice de $\mathscr{M}_p$.

5. Montrer que la propriété ($\heartsuit$) est vraie pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_p$ et pour toute norme sur $\mathscr{M}_p$.