

PROGRAMME DE LA COLLE N° 17

Semaine du 24/02/2025

Espaces vectoriels normés ▷ chapitre XI & TD n° 11 :

- définition d'une norme et de la distance associée.
- normes 1, 2 et ∞ sur l'ev \mathbb{K}^n et sur l'ev $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, extension de la norme ∞ à l'ev des fonctions bornées sur un intervalle I ; lien entre norme ∞ sur un intervalle I d'une fonction et convergence uniforme sur I d'une suite de fonctions.
- équivalence des normes en dimension finie (admise).
- limite d'une suite de vecteurs convergente, unicité de la limite; suites extraites, toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite; si l'evn est de dimension finie, alors une suite de vecteurs u_n tend vers un vecteur ℓ ssi chaque coordonnée de u_n tend vers chaque coordonnée de ℓ .
- partie bornée, suite de vecteurs bornée, fonction bornée; toute suite convergente est bornée.
- point adhérent à une partie d'un evn, adhérence d'une partie d'un evn, caractérisation séquentielle de l'adhérence; densité d'une partie.
- limite d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition; si l'evn d'arrivée de f est de dimension finie, alors $f(x)$ tend vers ℓ ssi chaque coordonnée de $f(x)$ tend vers chaque coordonnée de ℓ ; caractérisation séquentielle de la limite.
- continuité d'une fonction; toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue (les réciproques sont fausses); toute norme est 1-lipschitzienne.
- CNS pour qu'une application (multi-)linéaire soit continue; si l'evn de départ d'une application f (multi-)linéaire est de dimension finie, alors f est continue.
- norme subordonnée d'une application linéaire continue (définitions et propriétés : c'est une norme sous-multiplicative).
- sphères, boules ouvertes et boules fermées, définition d'un point intérieur à une partie, d'une partie ouverte et d'une partie fermée d'un evn; intersection d'un nombre fini et union d'ouverts, union d'un nombre fini et intersection de fermés; caractérisation séquentielle d'un fermé.
- l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert, de même pour un fermé; en particulier, si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E , $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ sont des fermés de E .

(La compacité, la connexité par arcs et la convexité ne sont pas au programme de cette colle, les séries vectorielles non plus.)