Corrigé du Kdo du 31/01/2025

E.v.n.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{A}_n$, respectivement $\mathcal{S}_n$, le sous-espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétriques, respectivement symétriques.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont fermés.

2) Soint A une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

---

1) L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto M - M^T$ est linéaire sur un *ev* de dimension finie donc elle est continue. D'où $\mathcal{S}_n = \mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}\right)$ est un fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue ▷ **proposition 50 du chapitre XI**.

On montre de même que $\mathcal{A}_n$ est un fermé en utilisant l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto M + M^T$.

2) Soit L la limite de la suite convergente $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

La suite $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$, elle converge donc aussi vers L ▷ **proposition 14 du chapitre XI**. De plus, chaque matrice A^{2k} est symétrique et l'ensemble $\mathcal{S}_n$ est fermé d'après la première question, donc la matrice L est aussi symétrique d'après la caractérisation séquentielle d'un fermé ▷ **proposition 54 du chapitre XI**.

On montre de même que la matrice Lest antisymétrique car c'est la limite de la suite des matrices A^{2k+1} antisymétriques. Or $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$. Donc la matrice L est nulle.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer sa limite est un projecteur.

Soit L la limite de la suite convergente $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

D'une part, la suite $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$, elle converge donc aussi vers L, autrement dit :

$$A^{2k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

D'autre part, la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto M^2$ est continue (car ♡), d'où $f(A^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(L)$, autrement dit :

$$A^{2k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} L^2.$$

Par unicité de la limite, $L = L^2$, donc L est un projecteur.

♡ Cette fonction f est continue car c'est la composée $g \circ h$ des fonctions continues

$$g : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ (M_1, M_2) \mapsto M_1 M_2 \quad \text{et} \quad h : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto (M, M).$$

La fonction g est continue car elle est bilinéaire sur un *ev* de dimension finie. La fonction h est continue car elle est linéaire sur un *ev* de dimension finie.

Exercice 3 (une preuve du théorème de Cayley-Hamilton)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ▷ **exo 9 du TD 11**.

1) Montrer que, si D est une matrice diagonale, alors $\chi_D(D) = 0$.

2) En déduire que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_A(A) = 0$.

---

1) Si la matrice D est diagonale, alors le polynôme $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(D)}(X-\lambda)$ est annulateur de la matrice D (▷ **revoir le théorème 31(iii) du chapitre IV et sa preuve**) et donc, *a fortiori*, le polynôme caractéristique $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(D)}(X-\lambda)^{m_\lambda}$ aussi.

2) En reprenant les notations de ▷ **l'exo 9 du TD 11**, soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min_{\lambda_i\neq\lambda_j}|\lambda_i-\lambda_j|$. On définit, pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, une matrice $A_k = A - \mathrm{diag}\left(\frac{\varepsilon}{k}, \frac{\varepsilon}{2k}, \cdots, \frac{\varepsilon}{nk}\right)$ qui est diagonalisable car ses valeurs propres sont distinctes deux à deux. Par suite $0 = \chi_{A_k}(A_k) = \prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda_i - \dfrac{\varepsilon}{ik})I_n - A_k\right]$. Or $\prod_{i=1}^{n}\left[(\lambda_i-\frac{\varepsilon}{ik})I_n - A_k\right] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i I_n - A) = \chi_A(A)$ car la fonction $[\mathcal{M}_n(\mathbb{C})]^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(M_1,\cdots,M_n)\to M_1\cdots M_n$ est multilinéaire sur un *ev* de dimension finie, donc continue. Or $0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par unicité de la limite, $\chi_A(A)=0$.