Corrigé du Kdo du 04/02/2025

Endo. remarquables d'un espace euclidien

Exercice 1. Soient a et b deux endomorphismes, représentés dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ par les matrices
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 & 1 \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Interpréter géométriquement les endomorphismes a et b.

Les matrices A et B représentent dans une base orthonormée directe (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ les endomorphismes a et b. Les deux premières colonnes $a(i)$ et $a(j)$ de la matrice A sont orthonormées. Et la troisième colonne $a(k)$ est égale au produit vectoriel $a(i) \wedge a(j)$ des deux premières, d'où $(a(i), a(j), a(k))$ est une *bond*, donc $A \in SO(3)$ et a est une rotation.

La trace de la matrice A est $0 = 1 + 2\cos\theta$, donc l'angle de la rotation est $\theta = \pm 2\pi/3$.

Le vecteur $j + k$ est invariant, autrement dit $j + k \in E_1(a)$, donc le vecteur $j + k$ dirige l'axe de la rotation.

De plus le vecteur i est orthogonal à la droite $E_1(a)$, son image $a(i)$ est la première colonne de la matrice A et $i \wedge a(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{4}(j + k)$ et $\frac{\sqrt{6}}{4} > 0$, donc l'endomorphisme a est la rotation d'angle $+2\pi/3$ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $j + k$.

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 & 1 \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot C, \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est la matrice dans la base (i, j, k) de la réflexion s par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(i, j - k)$. Donc $b = a \circ s$.

Exercice 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques est noté $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$. Soient θ un réel, $\vec{a}$ un vecteur de norme 1 et r la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par $\vec{a}$.

1) Soit $\vec{u}$ un vecteur orthogonal à $\vec{a}$. Montrer que :
$$r(\vec{u}) = \cos(\theta)\,\vec{u} + \sin(\theta)\,\vec{a} \wedge \vec{u}.$$

2) Soit un vecteur $\vec{v}$. Que dire du vecteur $\vec{v} - \langle \vec{v} | \vec{a} \rangle \vec{a}$? En déduire l'expression de $r(\vec{v})$ en fonction de $\vec{v}$, de $\vec{a}$ et de θ.

---

1) Si $\vec{u}$ est nul, c'est exact. Sinon, les vecteurs $\vec{b} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ forment une *bond* de $\mathbb{R}^3$ et $r(\vec{b}) = \cos\theta\vec{b} + \sin\theta\vec{c}$, d'où $r(\vec{u}) = r(\|\vec{u}\|\vec{b}) = \|\vec{u}\| r(\vec{b}) = \cos\theta\vec{u} + \sin\theta\vec{a} \wedge \vec{u}$ car $\|\vec{u}\|\vec{b} = \vec{u}$ et $\|\vec{u}\|\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{u}$.

2) Soit le réel $\lambda = \langle \vec{v} | \vec{a} \rangle$. De l'égalité
$$\langle \vec{v} - \lambda\vec{a} | \vec{a} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{a} \rangle - \lambda \langle \vec{a} | \vec{a} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{a} \rangle - \langle \vec{v} | \vec{a} \rangle = 0,$$
on déduit que le vecteur $\vec{u} = \vec{v} - \lambda\vec{a}$ est orthogonal au vecteur $\vec{a}$. Or $r(\vec{a}) = \vec{a}$ car ce vecteur appartient à l'axe de rotation. Donc
$$\begin{aligned} r(\vec{v}) &= r((\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \lambda\vec{a}) \\ &= r(\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \lambda r(\vec{a}) \\ &= \cos\theta(\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \sin\theta\vec{a} \wedge (\vec{v} - \lambda\vec{a}) + \lambda\vec{a} \\ &= \cos\theta\vec{v} - \cos\theta\langle \vec{v} | \vec{a} \rangle\vec{a} + \sin\theta\vec{a} \wedge \vec{v} + \langle \vec{v} | \vec{a} \rangle\vec{a} \\ &= \cos\theta\vec{v} + \sin\theta\vec{a} \wedge \vec{v} + (1 - \cos\theta)\langle \vec{v} | \vec{a} \rangle\vec{a} \end{aligned}$$