Espaces préhilbertiens

1 Produit scalaire, orthogonalité

Exercice 1. L'application $\varphi : (P,Q) \mapsto P(1)Q'(0) + P'(0)Q(1)$ définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$?

Exercice 2. ♡* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, ($X$ et Y vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$), on pose :

$$\phi(X,Y) = \det \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y^T \\ \hline X & A \end{array} \right)$$

A quelle condition sur A, ϕ est elle symétrique ? définie positive ?

Exercice 3. ♡ Soit A une partie d un espace préhilbertien E. Montrer

$$A^\perp = \left(\left(A^\perp \right)^\perp \right)^\perp .$$

Exercice 4. ♡* On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge, muni du produit scalaire défini par

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Soit F le sous-espace formé des suites à support fini (c'est-à-dire ayant un nombre fini de termes non nuls).

1. Vérifier que $F \subset L^2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 5. ** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On note $F = \{f \in E \mid \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\}$ et $G = \{g \in E \mid \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = G$.
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6. ♡ On note $l^2 = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 \text{ converge } \right\}$.

1. Montrer que si (u_n) et (v_n) appartiennent à l^2, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, que l^2 est un espace vetoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $\phi : ((u_n), (v_n)) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur l^2.
2. Soit $(a_n)_{n>1}$ une suite réelle telle que $\sum (n.a_n)^2$ converge.
   Montrer que $\sum a_n \sin(nx)$ converge pour tout réel x et que sa somme est une fonction continue.

2 Normes, projections

Exercice 7. $\heartsuit\heartsuit$ * Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \left\{ P \in E;\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.

Exercice 8. ** Soient $(E, \langle . \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire, $u_1, \dots, u_n$ des éléments de E et $C > 0$. On suppose que :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n,\ \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\| \leq C.$$

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \leq C^2$.

Exercice 9. $\heartsuit\heartsuit$** *(Inégalité de Hadamard)* Soit E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonomée.

1. Montrer que
$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, |\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$
Cas d'égalité ?
2. En déduire la majoration suivante pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\sqrt[n]{|\det A|} \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty.$$
3. En revenant à la définition du déterminant, montrer que
$$\sqrt[n]{|\det A|} \leq \sqrt[n]{n!}\|A\|_\infty.$$
4. Comparer ces deux majorations.

Exercice 10. $\heartsuit\heartsuit$ *(Une isométrie telle que $f(0) = 0$ est linéaire)* Soient $\big(E, (\ |\ )\big)$ $\big(F, <\ |\ >\big)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application telle que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \end{cases}.$$

On veut montrer que f est linéaire :

1. Montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$;
2. Montrer que $< f(x)|f(y) >= (x|y)$;
3. Montrer que $\|f(\lambda x + y) - (\lambda f(x) + f(y))\| = 0$.
4. Conclure.

Exercice 11. * Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tel que

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \|e_i\| = 1 \\ \\ \forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2 \end{cases}.$$

On veut montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale.

1. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale.
2. Soit $x \in E$ et $y = x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$. Montrer que x et y sont orthogonaux. En déduire $y = 0$.
3. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 12. ♡ Trouver la borne inférieure pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de

$$\int_0^{\pi} \left(\cos t - (at + b)\right)^2 dt.$$

Exercice 13. *** Soit $(E, < \mid >)$ un espace préhilbertien réel qui vérifie le critère de Cauchy : Soit une suite $(u_n)_{n\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n, p \geq n \Rightarrow \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon,$$

alors il existe $\ell \in E$, tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ℓ.
Le but de cet exercice est de montrer F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires si et seulement si F est un fermé.
On suppose désormais que F est un sous-espace vectoriel fermé de E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe une suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ qui vérifie le critère de Cauchy telle que $\|x - x_n\|$ converge $d(x, F)$. On utilisera l'identité du parallélogramme.
2. En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément noté $p_F(x) \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.
3. Montrer que pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.
4. Conclure.

La convergence des suites de Cauchy est équivalent à supposer que toute série absolument convergente est convergente.

Espaces préhilbertiens

(Solutions)

Solution 1. Non car $\varphi(P,P)<0$ pour $P=2-x$, donc elle n'est pas définie négative.

Solution 2. On calcule la matrice assocé au produit scalaire dans le base canonique $(E_1,\dots,E_n)$. On développe suivant la première ligne puis suivant la première colonne, avec $A_{i,j}$ le mineur d'ordre (i,j) de A et $\Delta_{i,j}$ le cofacteur associé :

$$\phi(E_i,E_j)=\det\left(\begin{array}{c|c} 0 & E_j^T \\ \hline E_i & A \end{array}\right)=(-1)^{1+j+1}(-1)^{i+1}A_{i,j}=-(-1)^{i+j}A_{i,j}=-\Delta_{i,j}$$

On en déduit que $\phi(X,Y)=-X^T\mathrm{Com}(A)Y$ où $\mathrm{Com}\,(A)$ et la matrice des cofacteurs.
Donc, φ est symétrique si et seulement si la comatrice de A est symétrique.

1. Si A est inversible, alors la condition équivaut à A inversible puisque c'est l'inverse à un scalaire près.
2. Si $\mathrm{rg}\,A\leq n-2$, alors $\mathrm{Com}\,A=0$ et la forme est bilinéaire symétrique postive non définie positive.
3. Si $\mathrm{rg}\,A=n-1$, alors $\mathrm{Com}\,(A)^TA=0$, donc $\mathrm{Im}\,A\subset\ker\mathrm{Com}\,(A)$, la comatrice est de rang 1, donc peut s'écrire $\mathrm{Com}\,(A)=UV^T$. L'image de $\mathrm{Com}\,(A)$ est engendrée par U. Si $\mathrm{Com}\,(A)$ est symétrique, alors $\mathrm{Com}\,(A)^T=VU^T$. Donc V engendre aussi l'image de $\mathrm{Com}\,(A)$, on en déduit que que $V=\lambda U$ et que $\mathrm{Com}\,(A)=\lambda UU^T$. De plus $A\mathrm{Com}\,(A)=0$, donc U engendre le noyau de A et $\mathrm{Im}\,A=\ker\mathrm{Com}\,(A)=U^T$.

   Réciproquement, si $\mathcal{M}_{n,1}=\ker A\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Im}\,(A)$ avec $\ker A=\mathbb{R}U$. Alors $A\mathrm{Com}\,(A)^T=\mathrm{Com}\,(A)^T=0$ montre que $\mathrm{Com}\,(A)=\lambda UU^T$.
   En conclusion, si le rang de A vaut $n-1$, $\mathrm{Com}\,(A)$ est symétrique si et seulement si $\mathcal{M}_{n,1}=\ker A\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Im}\,(A)$.

Pour que ϕ soit définie positive, il faut que $\mathrm{Com}\,(A)$ soit inversible, car sinon, pour tout $y\in\ker A\setminus\{0\}$, $\varphi(Y,Y)=Y^T\mathrm{Com}\,(A)Y=0$.
Donc A est symétrique réelle. De plus, on remarque $X^TAX=(AX)^TA^{-1}(AX$. On en déduit que A est définie négative (resp. négative) si et seulement si A^{-1} est définie postive (resp. négative). On en déduit que ϕ est définie positive si et seulement si $-A$ est définie positive.

Solution 3. On sait que

$$A\subset\left(A^\perp\right)^\perp\quad\text{et}\quad A\subset B\Rightarrow B^\perp\subset A^\perp.$$

— Par la première propriété utilisée avec $A^\perp$ au lieu de A, on obtient une première inclusion $A^\perp\subset\left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp$.

— Par la deuxième propriété utilisée avec $\left(A^\perp\right)^\perp$ au lieu de B, on obtient l'inclusion réciproque $\left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp\subset A^\perp$. Par double inclusion, on peut affirmer l'égalité.

Solution 4.

1. Soit u un élément de F, il existe un entier naturel q tel que $\forall n>q, u_n=0$. La suite $S_n=\sum_{k=0}^n u_k^2$ est stationnaire à la valeur S_q à partir du rang q, donc la série $\sum u_n^2$ converge.
2. Pour $p\in\mathbb{N}$, notons $e(p)$ l'élément de F défini par $\forall n\in\mathbb{N}, e(p)_n=\delta_{np}$. Soit $u\in F^\perp$, on a alors $\langle u,e(p)\rangle=0$, ce qui donne $u_p=0$, ceci étant vrai pour tout entier p, on en déduit que $u=0$, donc $F^\perp=\{0\}$.

Solution 5. 1. Il faut montrer que

— φ est une forme bilinéaire symétrique E.

— $\forall x \in E\,,\ \varphi(x,x) \geq 0$.

— $\varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

2. Pour tous $f \in F$ et $g \in G$, on a

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $G \subset F^{\perp}$.

Soit $g \in F^{\perp}$, alors f définie par $f(t) = tg(t)\mathbb{1}_{[0,1]} \in F$, et

$$0 =< f|g) = \int_0^1 tg^2(t)\,dt.$$

Comme $tg(t) \geq 0$ et est continue sur $[0,1]$, on en déduit que g est nulle sur $[0,1]$, donc $g \in G$. En conclusion $G = F^{\perp}$.

3. Si F et G sont supplémentaires, pour tout $f \in E$, on a $f = f_1 + f_2$ tel que $f_1 \in F, f_2 \in G$. Donc $f(0) = f_1(0) + f_2(0) = 0$. Notons qu'il existe des fonctions dans E qui ne sont pas nulles à 0. Donc F et G ne sont pas supplémentaires.

Solution 6.

1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de l^2.

Pour tout $n, (|a_n| - |b_n|)^2 = a_n^2 + b_n^2 - 2\,|a_n| \cdot |b_n| \geq 0$ d'où $0 \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq \frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ et par majoration, $\sum a_n b_n$ converge absolument.

ϕ est bilinéaire et symétrique sur $l^2 \times l^2$ (immédiat).

Soit $(u_n) \in l^2$, non nulle : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \neq 0$ $\phi\left((u_n), (u_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \geq u_{n_0}^2 > 0$.

Donc ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l^2, c'est à dire un produit scalaire.

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum (n \cdot a_n)^2$ converge. On peut définir la suite pour l'indice 0 en posant $a_0 = 0$. Même chose pour les autres suites qui ne seraient pas définies en 0 .

Puisque $(n.a_n)_{n\geq 0}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ appartiennent à l^2, la série $\sum n.a_n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \sum a_n$ converge absolument.

Notons alors $v_n(x) = a_n \sin(nx)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|a_n \sin(nx)| \leq |a_n|$ donc $\|v_n\|_{\mathbb{R}}^{\infty} \leq |a_n|$.

Chaque fonction v_n est continue sur $\mathbb{R}$, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, donc la fonction somme $x \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 2.

1. Il est clair qu'on définit ainsi une forme bilinéaire symétrique et que $\langle P, P\rangle \geq 0$. De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} P^2(a_k) = 0 \implies P(a_k) = 0 \text{ pour } k = 1, \ldots, n.$$

Or, un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n+1$ racines est le polynôme nul. Donc $P = 0$ et la forme bilinéaire est définie positive : c'est un produit scalaire.

2. Contrairement à ce que l'on fait souvent, ici, utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale n'est pas la bonne idée. Il faut plutôt raisonner en terme de racines et voir que si P s'annule en beaucoup de a_k, alors $P(a_k)Q(a_k)$ sera souvent nul. On va donc définir, pour $k = 0, \ldots, n$

$$P_k = \prod_{j\neq k}(X - a_j).$$

Il est clair que, pour $k \neq l$, on a

$$\langle P_k, P_l\rangle = P_k(a_k)P_l(a_k) = 0.$$

La famille est donc orthogonale. On l'orthonormalise en remarquant que

$$\|P_k\|^2 = \prod_{j\neq k}(a_k - a_j)^2$$

et on pose donc

$$Q_k = \frac{P_k}{\prod_{j\neq k}(a_k - a_j)}.$$

$(Q_0, \dots, Q_n)$ est une famille orthonormale de $n+1$ éléments dans un espace de dimension $n+1$. C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On va trouver un vecteur normal à l'hyperplan H. C'est très facile en regardant la définition de H, car si on pose $R = 1$, on a

$$\langle P, R\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k).$$

R est donc un vecteur normal à H. Par une formule du cours (très facile à retrouver par un dessin), on en déduit que la distance de Q à H est

$$\frac{\langle Q, R\rangle}{\|R\|} = \frac{\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)}{\sqrt{n+1}}.$$

Solution 8. Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}^n$. Alors on a

$$C^2 \geq \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 + 2\sum_{i<j} \varepsilon_i\varepsilon_j \langle u_i, u_j\rangle.$$

Il suffit donc de prouver que l'on peut choisir les signes ε_i de sorte que

$$\sum_{i<j} \varepsilon_i\varepsilon_j \langle u_i, u_j\rangle \geq 0.$$

On réécrit cette somme sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle \varepsilon_i u_i, \sum_{j=i+1}^{n} \varepsilon_j u_j\rangle.$$

Fixons $\varepsilon_n = 1$. Alors on peut choisir $\varepsilon_{n-1} \in \{-1, 1\}$ de sorte que $\langle \varepsilon_{n-1} u_{n-1}, \varepsilon_n u_n\rangle \geq 0$. Cette valeur de ε_{n-1} étant fixée, on peut choisir $\varepsilon_{n-2} \in \{-1, 1\}$ de sorte que

$$\langle \varepsilon_{n-2} u_{n-2}, \varepsilon_{n-1} u_{n-1} + \varepsilon_n u_n\rangle \geq 0.$$

De proche en proche, on peut trouver des valeurs de ε_i de sorte que, pour tout i, on a

$$\langle \varepsilon_i u_i, \sum_{j=i+1}^{n} \varepsilon_j u_j\rangle \geq 0.$$

De la sorte, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_i u_i, \sum_{j=i+1}^{n} \varepsilon_j u_j\rangle \geq 0$$

ce qui implique $\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \leq C^2$.

Solution 9.

1. Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, alors l'inégalité s'écrit $0 \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ qui est vérifiée.
   Sinon, $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base.
   Si elle est orthonormée, alors $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)| = 1$, comme déterminant d'une matrice orthogonal et l'inégalité est encore vérifiée. On en déduit que l'égalité est encore vérifiée si la base est orthogonale.
   Sinon,on utilise le procédé de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base $\mathcal{C} = (x_1, \cdots, x_n)$ en une base $\mathcal{D} = (y_1, \cdots, y_n)$. Par définition, en notant $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a
   $$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \det P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$
   Mais
   $$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{D}} P_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$$
   et la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ est la matrice de passage d'une base orthonormée vers une base orthonormée et donc son déterminant vaut 1. Enfin la matrice $P_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ est triangulaire supérieure et sa diagonale vaut $\langle x_i, y_i\rangle$. On en déduit que
   $$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i\rangle.$$
   L'inégalité de Cauchy Schwarz montre que
   $$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)\| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\| \times \|y_i\| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$
   avec égalité ssi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \lambda_i y_i$, c'est-à-dire ssi la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est orthogonale.
2. On sait que $\|x_i\| \leq \sqrt{n}\|x_i\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$ où x_i est le i-ème vecteur colonne de la matrice A. L'inégalité s'en déduit immédiatement.
3. On écrit la définition du déterminant comme la somme de $n!$ termes produits de n coefficients de la matrices et donc
   $$|\det A| \leq n!\|A\|_\infty^n$$
4. On peut se douter que la majoration 2/ et meilleure que celle du 3/. Pour le prouver, on étudie le quotient des deux à la puissance 2n
   $$\frac{n^n}{(n!)^2} = \frac{n}{n \times 1} \times \frac{n}{(n-1) \times 2} \times \cdots\cdots \times \frac{n}{1 \times n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(n-k)(k+1)}.$$
   La fonction $g : x \mapsto (n-x)(x+1)$ atteint son minimum pour $x = \dfrac{n-1}{2}$ et vaut
   $$g(\frac{n-1}{2}) = \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}(n^2 + 2n + 1).$$
   Enfin, $\dfrac{1}{4}(n^2 + 2n + 1) - n = \dfrac{1}{4}(n-1)^2 \geq 0$. On en déduit que le quotient $\dfrac{n}{(n-k)(k+1)} \leq 1$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et donc $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n!}} \leq 1$, ce qui confirme notre intuition.

Solution 10. 1. On pose $y = 0$.
2. Développer $< f(x) - f(y) | f(x) - f(y) >$.
3. Développer $\|f(\lambda x + y) - (\lambda f(x) + f(y))\|^2$ et on réécrit la même expression en retirant tous les f en utilisant les questions précédentes ; en resimplifiant on trouve $\|(\lambda x + y) - (\lambda x + y)\|^2$ qui vaut zéro.
4. f est bien linéaire.

Solution 2. On cherche le projeté orthogonale de $\cos t$ sur $\mathbb{R}_1[t]$ sous-espace de $\mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$.C'est-à-dire $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\cos t - at - b \in \mathbb{R}_1[t]^\perp$, ce qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l}(\cos t - at - b|1) = 0\\(\cos t - at - b|t) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\pi \cos t - at - b = 0\\ \displaystyle\int_0^\pi t\cos t - at^2 - bt\,dt = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}a\dfrac{\pi^2}{2} + b\pi = 0\\ -2 - a\dfrac{\pi^3}{3} - b\dfrac{\pi^2}{2} = 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}b = -a\dfrac{\pi}{2}\\ a\left(\dfrac{\pi^3}{3} - \dfrac{\pi^3}{4}\right) = -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}b = -a\dfrac{\pi}{2}\\ a = -\dfrac{24}{\pi^3}\end{array}\right.$$

et donc $-\dfrac{24}{\pi^3}(t - \dfrac{\pi}{2})$ est le projeté. La valeur minimale recherché est donc comme $\cos t - at - b \in \mathbb{R}_1[t]^\perp$:

$$(\cos t - at - b|\cos t - at - b) = (\cos t - at - b|cost) = \int_0^\pi \cos^2 t\,dt - a\int_0^\pi t\cos t\,dt = \frac{\pi}{2} + 2a$$

et finalement la borne inférieure vaut $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{48}{\pi^3}$ soit un peu moins de $0,02$.

Solution 13.

1. Soit $x \in E$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^\mathbb{N}$ telle que $(\|x - x_n\|)$ converge vers $d(x,F) = \inf_{y\in F}\|x - y\| = \delta$.
   L'identité du parallélogramme montre que
   $$2\left(\|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2\right) = \|(x - x_p) - (x - x_q)\|^2 + \|(x - x_p) + (x - x_q)\|^2$$
   puis
   $$2\left(\|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2\right) = \|x_p - x_q\|^2 + 4\left\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2 \ (*)$$
   Comme $\frac{x_p+x_q}{2} \in F$, on a $\left\|x - \frac{x_p+x_q}{2}\right\|^2 \geq \delta^2$.
   Il vient
   $$\|x_p - x_q\|^2 \leq 2\left(\|x - x_p\|^2 - \delta^2 + \|x - x_q\|^2 - \delta^2\right).$$
   Par hypothèse, $\lim_{p\to+\infty}\|x - x_p\|^2 = \lim_{p\to+\infty}\|x - x_p\|^2 = \delta^2$. D'où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$ $\|x_p - x_q\|^2 \leq \varepsilon^2$.
   La suite (x_n) vérifie le critère de Cauchy, elle est convergente dans E.
2. Comme F est un fermé, on en déduit que sa limite y est dans F et par définition $\|x - y\| = \delta = d(x,F)$. S'ile xiste $y' \in F$, tel que $\|x - y\| = \|x - y'\|$, alors l'inégalité $(*)$ avec $x_p = y$ et $x_q = y'$ donne
   $$2\left(\|x - y\|^2 + \|x - y'\|^2\right) = \|y - y'\|^2 + 4\left\|x - \frac{y + y'}{2}\right\|^2.$$
   Or $\dfrac{x+y}{2} \in F$, et $\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 \leq \delta^2$ avec égalité si et seulement si $y = y'$. Par minimalité de δ, $y = y'$.
3. On peut donc associer à tout $x \in E$ un vecteur $p_F(x) \in F$, tel que $\|x - p_F(x)\| = d(x,F)$.
   Montrons que c'est la projection orthogonale sur F (et donc que la projection orthogonale sur F existe!
   Pour cela, on écrit que pour tout $h \in F$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\|x - p_F(x) + \lambda h\| \geq \|x - p_F(x)\| \iff \lambda^2\|h\|^2 + 2\lambda < x - p_F(x)|h> \geq 0$$
   Pour h fixé, cela implique que $< x - p_F(x)|h >= 0$ et donc $\forall h \in F$, $h \perp x - p_F(x)$. On a bien $x - p_F(x) \in F^\perp$.

4. On a montré que tout $x \in E$ peut s'écrire $x - p_F(x) + p_F(x)$ où $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$. Cela montre que p_F est bien la projection orthogonale sur F. Remarquons qu'alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Si F et $F^\perp$ sont supplémentaires, alors $F^\perp = \cap_{x \in F} x^\perp$ est un fermé !