Thème n° 1

Suites & séries

11 février 2025

Il s'agit du premier des quatre thèmes de révisions.

Objectif : Réviser les suites & séries numériques ▷ **I**, les suites & séries de fonctions ▷ **V & VII** et les séries entières ▷ **IX**. Et aussi les suites de vecteurs ▷ **XI** (viendront à la rentrée les séries de vecteurs ▷ **Annexe C**).

Mode d'emploi : ▷ **Colle3.2** renvoie à la colle n° 3 exercice 2 ; ▷ **IV.23** renvoie au chapitre IV énoncé (théorème, définition, exemple, etc) 23 ; ▷ **IV§2** renvoie au chapitre IV paragraphe 2 ; ▷ **TD11.3** renvoie à la feuille de TD n° 11 exercice 3 ; ▷ **DS4.2q.4** renvoie au DS n° 4 exercice 2 question 4.

Ne négligez aucun des ▷ **renvois** : s'il s'agit d'un point de cours, (re)lisez-le ; s'il s'agit d'un exercice, essayez de le (re)faire ou *a minima* de lire le corrigé et, si vous l'aviez déjà résolu, de le comparer à votre copie corrigée d'antan. Au fur et à mesure, essayez de résoudre, rédiger et me rendre les exercices 1 à 4 dans la case *Thème 1* du Cahier de Prépa.

A • Réviser la sommation des relations de comparaison ▷ **I§6&7, DM2Pb1q.2, TD1.10** et son analogue : l'intégration des relations de comparaison ▷ **III.15&16, TD3.7&9**.

Exercice 1.

1. Soit $u_n = \operatorname{th} n = \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge et calculer un équivalent, quand n tend vers l'infini, de la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Soit $v_n = n - S_n$. Montrer que la suite v_n converge et que sa limite ℓ est inférieure à $\frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}$.
3. Déterminer un équivalent, quand n tend vers l'infini, de $\ell - v_n$.

B • Comment mq une série de fonctions converge uniformément :

1. en montrant que la série converge normalement ;
2. en montrant que la suite des restes converge uniformément vers 0, parfois en utilisant le T.S.A. ▷ **TD7.1q.2&3, Colle13.2q.4b** ;
3. mais pas normalement ▷ **VII.8**.

C • Comment mq une suite ou une série de fonctions converge simplement mais pas uniformément :

1. avec une suite de points ▷ **TD5.2 & Colle8.3q.3** ;
2. car la série ne cv pas uniformément si la suite ne converge pas uniformément vers 0 ▷ **VII.3&4, Colle10.1q.5** ;
3. par l'absurde car on perd la continuité ▷ **Colle10.1q.5, Colle 12.1q.3c** ou l'interversion de $\int$ et lim ▷ **TD5.3 q.3** ou l'interversion des limites ▷ **TD7.3 q.8 & TD7.6q.4** (une occasion de réviser la fonction zêta de Riemann ▷ **TD1.8, Colle11.1**).

Exercice 2 (Un développement asymptotique de la fonction ζ)**.** On a déjà montré que $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$ ▷ **TD1.8q.4** et on veut montrer que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + \underset{x\to 1^+}{o(1)}$ où γ est la constante d'Euler ▷ **I§7**. Pour ce faire, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$ pour tous $x \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : **a)** $0 \leq f_n(x) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x dt}{t^{x+1}}$;

b) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[1, 2]$; **c)** $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \gamma$.

D • Stratégie de la « barrière » ▷ **V.8, TD7.2q.4 & DS4.2q.4**.

E • La convergence uniforme permet d'intégrer terme à terme une série de fonctions (continues sur un segment). Réviser aussi le théo. d'intégration terme à terme sur un intervalle qc ▷ **VII.16&17, TD7.4&7.5q.4**.

Exercice 3 (après avoir révisé ▷ **TD5.4 & TD9.6**)**.** Soit la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum u_n x^n$ converge-t-elle ? Pour chacune de ces valeurs, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

F • Une série entière converge normalement (et donc uniformément) :

— sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence ▷ **IX.13 & figure IX.2, TD11.8q.1** ;

— mais pas toujours sur l'intervalle ouvert de convergence ▷ **VII.4**.

G • Comment mq une fonction est développable en série entière :

— en utilisant le produit de Cauchy ▷ **IX.27 & TD9.8q.1** ;

— en intervertissant série et intégrale ▷ **DS5étoile.3q.5** ;

— en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral ▷ **IX.25&26**.

La série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ converge parfois vers ladite fonction (dans le ▷ **DS5étoile.2**, on montre que la série de Taylor de la fonction *tan* converge à la q.4 et que c'est bien vers la fonction *tan* à la q.8), converge parfois vers une autre fonction ▷ **IX.24** et parfois même diverge pour tout $x \neq 0$.

Exercice 4. Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n} \cos(n^2 x)$. Montrer que la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et que $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} \mathrm{e}^{-n} \cos(n^2 x)$ et $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2} \mathrm{e}^{-n} \sin(n^2 x)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. En déduire que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ de la fonction f est nul.

En ligne sur la Cahier de Prépa :

— En vous aidant du corrigé, tentez ▷ **l'exercice 2 du DS6 de l'an passé (2023-2024)**. Il est tiré du sujet de concours Mines-Ponts Maths 2 MPI 2023.

— En vous aidant du corrigé ▷ **m18cp2cb.pdf**, essayez les q.1 à 21 puis 24 à 28 du sujet Centrale-Supélec Maths 2 PC 2018 ▷ **m18cp2e.pdf** : il explore le lien entre la fonction ζ, l'arithmétique et les probabilités. Il sera encore temps de tenter les q.22&23 une fois traité le chapitre sur les intégrales à paramètre ▷ **XIII** puis les q.29 à 35 une fois traité le chapitre sur les couples de v.a. ▷ **XIV**.