Centrale-Supélec 2018 - Filière PC
Corrigé de l'épreuve Mathématiques 2

Damien Broizat
Lycée Jules Ferry, Cannes

I Fonction zêta

Q 1. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$, donc $\mathcal{D}_\zeta =]1;+\infty[$.

Q 2. En posant $g_n(x) = \frac{1}{n^x}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge normalement sur tout intervalle réel $[a;+\infty[$ avec $a > 1$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geq a,\ |\frac{1}{n^x}| \leq \frac{1}{n^a}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge.

Il y a donc convergence uniforme sur tout intervalle $[a;+\infty[$. Puisque les g_n sont continues sur $[a;+\infty[$, on en déduit que ζ est continue sur $[a;+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, on en conclut que ζ est continue sur $]1;+\infty[$.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ est décroissante sur $]1;+\infty[$, donc par somme (infinie), la fonction ζ est décroissante sur $]1;+\infty[$.

Q 4. La fonction ζ est décroissante (d'après **Q 3.**) et minorée par 0 (c'est une limite simple de fonctions positives), donc elle possède une limite réelle positive en $+\infty$.

Q 5. Fixons $x > 1$ et $n \geq 2$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ (qui est bien continue par morceaux...) sur les intervalles $[n;n+1]$ et $[n-1;n]$, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x},$$

ainsi que

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}.$$

Cela donne l'encadrement voulu :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}.$$

Q 6. Fixons un réel $x > 1$ et un entier $N \geq 2$. En sommant les inégalités obtenues en **Q 5.** pour $n = 2 \cdots N$, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x},$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles)

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{N} \frac{dt}{t^x},$$

ou encore

$$\frac{(N+1)^{1-x} - 2^{1-x}}{1-x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \frac{N^{1-x} - 1}{1-x}.$$

En faisant tendre $N \to +\infty$ et en ajoutant 1, on obtient (puisque $1 - x < 0$) :

$$1 - \frac{2^{1-x}}{1-x} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 - \frac{1}{1-x},$$

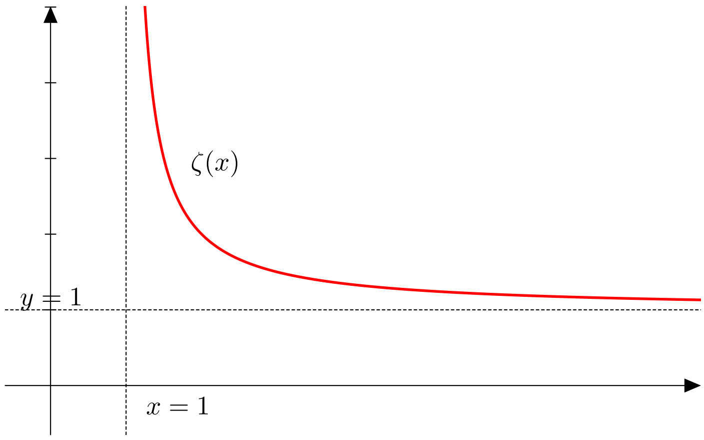
c'est-à-dire

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Q 7. Puisque $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right)=+\infty$, la minoration de $\zeta(x)$ obtenue en **Q 6.** montre que $\lim\limits_{x\to 1^+}\zeta(x)=+\infty$.

Q 8. Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1$, l'encadrement obtenu en **Q 6.** montre que $\lim\limits_{x\to +\infty}\zeta(x)=1$.

Q 9. Courbe représentative de ζ :



II Etude d'une fonction définie par une somme

Q 10. Posons $f_n(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}=\frac{-x}{n(n+x)}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-n\}$, donc puisque $f=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$, on a $\mathcal{D}_f\subset\mathbb{R}\setminus\{p\in\mathbb{Z},\ p<0\}$.
Réciproquement, si $x\in\mathbb{R}\setminus\{p\in\mathbb{Z},\ p<0\}$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 1}f_n(x)$ converge, puisque si $x=0$, $f_n(x)=0$, et si $x\neq 0$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x}{n^2}$.
On a donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{p\in\mathbb{Z},\ p<0\}$.

Q 11. On a $\mathcal{D}_f=]-1;+\infty[\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}]-k-1;-k[\right)$.
Soit $[a;b]$ un segment inclus dans l'un des intervalles disjoints constituant $\mathcal{D}_f$.
Les fonctions $f_n:x\mapsto\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}$ étant décroissantes sur $[a;b]$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[a;b]$, $f_n(b)\leq f_n(x)\leq f_n(a)$, donc $|f_n(x)|\leq\max\{|f_n(a)|;|f_n(b)|\}\leq|f_n(a)|+|f_n(b)|$.
Or, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, la série $\sum\limits_{n\geq 1}|f_n(x)|$ converge (vu que $|f_n(x)|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{|x|}{n^2}$ pour $x\neq 0$), donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}(|f_n(a)|+|f_n(b)|)$ converge. Ceci montre que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1}f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a;b]\subset\mathcal{D}_f$. Les fonctions f_n étant continues sur $\mathcal{D}_f$, on en déduit que f est continue sur tout segment de $\mathcal{D}_f$, donc sur $\mathcal{D}_f$.
Enfin, les fonctions f_n sont décroissantes sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$, donc leur somme (infinie) f est décroissante sur chaque intervalle de $\mathcal{D}_f$ (**attention, pas sur $\boldsymbol{\mathcal{D}_f}$!**).

Q 12. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a (par téléscopage et changements d'indices) :

$$\begin{aligned}
f(k) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=k+1}^{k+N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{N+k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)\\
&= -\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}+\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{N+k}\frac{1}{n}\right)=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}+\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+k}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+k}\right)=0$, on en déduit que $f(k)=-\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{n}=-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$.

Q 13. On utilise d'abord une comparaison série-intégrale pour encadrer $f(k)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$, puis on utilisera la décroissance de f sur $[1;+\infty[$ pour encadrer $f(x)$ pour tout réel $x\geq 1$.

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1;+\infty[$, on a

$$\forall n \geq 2, \qquad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t},$$

donc pour tout entier $k \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{k} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=2}^{k} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t},$$

c'est-à-dire

$$\ln(k+1) - \ln(2) \leq \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} \leq \ln(k).$$

En ajoutant 1 et en utilisant le résultat de **Q 12.**, on obtient l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad -\ln(k) - 1 \leq f(k) \leq -\ln(k+1) + \ln(2) - 1$$

(il reste trivialement vrai pour $k = 1$).
Soit maintenant un réel $x \geq 1$. En notant k la partie entière de x, on a $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq x \leq k+1$. La décroissance de f et les encadrements précédents impliquent alors :

$$-\ln(k+1) - 1 \leq f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \leq -\ln(k+1) + \ln(2) - 1,$$

ce qui entraîne (puisque $\ln(x) \leq \ln(k+1) \leq \ln(x+1)$) :

$$-\ln(x+1) - 1 \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(2) - 1,$$

ou encore

$$-\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(2) - 1.$$

En divisant par $\ln(x)$ pour $x > 1$, on obtient :

$$-1 - \frac{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{\ln(x)} \leq -1 + \frac{\ln(2) - 1}{\ln(x)}.$$

Cet encadrement donne $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\ln(x)} = -1$, donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\ln(x)$.

Q 14. Soit $x \in \mathcal{D}_f$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si $x + k$ est un entier strictement négatif p, alors $x = p - k$ aussi, ce qui est contradictoire. Donc $x + k \in \mathcal{D}_f$.
En reprenant la technique de téléscopage de la question **Q 12.**, on a

$$\begin{aligned} f(x+k) - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{n+x+k} - \tfrac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{n+x} - \tfrac{1}{n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\tfrac{1}{n+x+k} - \tfrac{1}{n+x}\right) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=k+1}^{k+N} \tfrac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{n+x}\right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=N+1}^{N+k} \tfrac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{k} \tfrac{1}{n+x}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{k} \tfrac{1}{n+x} + \lim_{N \to +\infty} \left(\tfrac{1}{N+1+x} + \cdots + \tfrac{1}{N+k+x}\right). \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{N+1+x} + \cdots + \frac{1}{N+k+x}\right) = 0$, on en déduit que $f(x+k) - f(x) = -\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n+x}$.

Q 15. D'après **Q 14.**, on a

$$\forall (x,k) \in \mathcal{D}_f \times \mathbb{N}^*, \quad f(x) = f(x+k) + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+k}.$$

Or, par continuité de f en 0, $\lim\limits_{x \to -k} f(x+k) = f(0) = 0$, et $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n}$ possède une limite finie lorsque $x \to -k$. Puisque $\frac{1}{x+k}$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \to -k$, on en déduit que $f(x+k) + \sum\limits_{n=1}^{k-1} \frac{1}{x+n} \underset{x \to -k}{=} o\left(\frac{1}{x+k}\right)$, et donc $f(x) \underset{x \to -k}{\sim} \frac{1}{x+k}$.
D'où $\lim\limits_{x \to -k^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -k^-} f(x) = -\infty$.

Q 16. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty}\zeta(k+1)=1$ (d'après **Q 8.**), on a $|(-1)^k\zeta(k+1)x^k| \underset{k\to+\infty}{\sim} |x|^k$ donc, tout comme la série géométrique $\sum\limits_{k\geq 1}|x|^k$, la série entière $\sum\limits_{k\geq 1}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$ converge absolument si $|x|<1$ et diverge grossièrement si $|x|>1$. Son rayon de convergence est donc égal à $R=1$.
En $x=\pm 1$, il y a divergence grossière de la série entière, puisque le module du terme général tend vers 1.

Q 17. Les fonctions $f_n : x\mapsto \frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{p\in\mathbb{Z},\ p<0\}$, avec

$$\forall (k,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathcal{D}_f,\quad f_n^{(k)}(x)=\frac{d^k}{dx^k}(x+n)^{-1}=(-1)\cdots(-k)(x+n)^{-k-1}=\frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

On sait déjà (cf. **Q 11.**) que $f=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.
Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$, il suffit de montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{n\geq 1}f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment $[a;b]\subset\mathcal{D}_f$. C'est le cas puisque

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[a;b],\ \forall n>-a,\qquad |f_n^{(k)}(x)|\leq\frac{k!}{|x+n|^{k+1}}=\frac{k!}{(x+n)^{k+1}}\leq\frac{k!}{(n+a)^{k+1}},$$

(dans ces conditions, $x+n\geq a+n>0$) et la série $\sum\limits_{n>-a}\frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ converge (car $k+1\geq 2$).
Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions nous donne alors :

$$\forall (k,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathcal{D}_f,\qquad f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n^{(k)}(x)=(-1)^k k!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{k+1}}.$$

Q 18. Fixons $x\in]-1;1[$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $n+x\geq 1+x>0$, donc d'après l'expression de $f^{(k)}$ obtenue en **Q 17.** :

$$|f^{(k)}(x)|=k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right)\leq k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^{k+1}}\right),$$

c'est-à-dire

$$|f^{(k)}(x)|\leq k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}}+\zeta(k+1)\right)\leq k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}}+\zeta(2)\right)$$

(par décroissance de ζ), d'où la majoration voulue avec $A=\zeta(2)$.

Q 19. Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à la fonction f :

$$\forall x\in]-1;1[,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x),$$

avec $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.
Puisque $f(0)=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0)=(-1)^k k!\zeta(k+1)$ (d'après **Q 17.**), on a

$$\forall x\in]-1;1[,\quad f(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta(k+1)x^k+R_n(x),$$

donc il suffit de montrer que $\forall x\in]-1;1[,\ \lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ pour établir que f est développable en série entière sur $]-1;1[$. Pour cela, majorons $R_n(x)$ à l'aide de **Q 18.** :

$$|R_n(x)|\leq\frac{1}{n!}\left|\int_0^x|x-t|^n|f^{(n+1)}(t)|dt\right|\leq\frac{1}{n!}\left|\int_0^x|x-t|^n(n+1)!\left(A+\frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right)dt\right|,$$

c'est-à-dire

$$|R_n(x)|\leq(n+1)\left|\int_0^x|x-t|^n\left(A+\frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right)dt\right|.$$

Procédons en fonction du signe de x :

- Si $0 \leq x < 1$, alors

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1)\int_0^x (x-t)^n \underbrace{\left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right)}_{\leq A+1} dt \\ &\leq (A+1)(n+1)\int_0^x (x-t)^n dt = (A+1)x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

- Si $-1 < x < 0$, alors

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq (n+1)\int_x^0 (t-x)^n \left(A + \frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right) dt \\ &= (n+1)\left(A\int_x^0 (t-x)^n dt + \int_x^0 \left(\frac{t-x}{t+1}\right)^n \times \frac{dt}{(1+t)^2}\right) \\ &= A(-x)^{n+1} + (n+1)\int_x^0 \left(1 - \frac{1+x}{1+t}\right)^n \times \frac{dt}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Vu que la fonction $t \mapsto 1 - \frac{1+x}{1+t}$ est croissante et positive sur l'intervalle $[x;0]$, on a

$$\forall t \in [x;0], \quad \left(1 - \frac{1+x}{1+t}\right)^n \leq (-x)^n,$$

et donc

$$|R_n(x)| \leq A(-x)^{n+1} + (n+1)(-x)^n \int_x^0 \frac{dt}{(1+t)^2} = (-x)^{n+1}\left(A + \frac{n+1}{1+x}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissances comparées).

Dans tous les cas, on a donc $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui amène :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \zeta(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1)x^k.$$

Q 20. Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \frac{t^x-1}{1-t}$ est continue sur $]0;1[$.
L'intégrale proposée est faussement impropre en 1, car en posant $u = 1-t$, on a

$$\frac{t^x-1}{1-t} = \frac{(1-u)^x-1}{u} = \frac{1-xu+o(u)-1}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} -x,$$

donc la fonction se prolonge continûment en 1.
En outre, $\frac{t^x-1}{1-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x - 1$, et l'intégrale $\int_0^1 t^x dt$ converge si et seulement si $x > -1$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t} dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

Q 21. Fixons $x > -1$. Puisque $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ pour tout $t \in [0;1[$, on a

$$\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t} dt = \int_0^1 (t^x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t) dt,$$

en posant $h_n(t) = (t^x-1)t^n$. On applique alors le théorème d'intégration terme à terme à la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$: chaque h_n est continue (par morceaux) sur $]0;1]$, de signe constant (opposé à celui de x), intégrable car $|h_n(t)| \underset{t\to 0}{\sim} t^\alpha$ avec $\alpha = \min(n, n+x) > -1$, et on a

$$\int_0^1 |h_n(t)| dt = \pm\int_0^1 h_n(t) dt = \left|\int_0^1 (t^{n+x} - t^n) dt\right| = \left|\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{|x|}{(n+x+1)(n+1)}.$$

De plus, la série $\sum_{n\geq 0} h_n$ converge simplement sur $]0;1[$ vers la fonction continue $t \mapsto \frac{t^x-1}{1-t}$, et enfin, la série $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |h_n(t)|dt$ converge, puisque $\int_0^1 |h_n(t)|dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}$ pour $x \neq 0$.
Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 h_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n+1} \right) = f(x).$$

Q 22. Le résultat établi en **Q 19.** montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad (-1)^k \zeta(k+1) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Pour exprimer $f^{(k)}(0)$ sous forme intégrale, appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégral (version $\mathcal{C}^\infty$) à l'expression de f obtenue en **Q 21.**. On a

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \qquad f(x) = \int_0^1 \varphi(t,x)dt,$$

où la fonction $\varphi : (t,x) \mapsto \frac{t^x-1}{1-t}$ vérifie les propriétés suivantes :

- φ est définie sur $]0;1[_t \times]-1;+\infty[_x$;
- pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto \varphi(t,x)$ est intégrable sur $]0;1[$ (c'est une conséquence du théorème d'intégration terme à terme appliqué en **Q 21.**) ;
- pour tout $t \in]0;1[$, la fonction $x \mapsto \varphi(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t,x) = \frac{\ln^k(t)t^x}{1-t};$$

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons une majoration uniforme locale de $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}$:

$$\forall a > -1,\ \forall (t,x) \in]0;1[\times[a;+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t,x)\right| \leq \frac{t^a|\ln(t)|^k}{1-t},$$

et la fonction $\psi_{k,a} : t \mapsto \dfrac{t^a|\ln(t)|^k}{1-t}$ est continue et intégrable sur $]0;1[$, puisque :
— au voisinage de 0, $\psi_{k,a}(t) \underset{0^+}{\sim} t^a|\ln(t)|^k = \underset{0^+}{o}\left(t^\beta\right)$, pour tout $\beta \in]-1;a[$, donc $\psi_{k,a}$ est intégrable en 0 ;
— au voisinage de 1, $\psi_{k,a}(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{|\ln(t)|^k}{1-t} \underset{1^-}{\sim} \frac{|t-1|^k}{1-t} = (1-t)^{k-1}$, donc $\psi_{k,a}$ se prolonge continûment en 1 (puisque $k-1 \geq 0$), ce qui montre son intégrabilité en 1.

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$, et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1;+\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(t,x)dt = \int_0^1 \frac{\ln^k(t)t^x}{1-t}dt.$$

En évaluant en $x=0$, on obtient donc l'expression intégrale :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta(k+1) = \frac{f^{(k)}(0)}{(-1)^k k!} = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 \frac{\ln(t)^k}{1-t}dt.$$

Q 23. Dans l'intégrale précédemment obtenue, on utilise le changement de variable $u \mapsto e^{-u}$, qui est une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0;+\infty[$ dans $]0;1[$: en posant $t = e^{-u}$, on a $dt = -e^{-u}du$, donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)^k}{1-t}dt = \int_{+\infty}^0 \frac{(-u)^k}{1-e^{-u}}(-e^{-u})du = (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u-1}du.$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta(k+1) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u-1}du.$$

III Probabilités

Q 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{\zeta(x)n^x} \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{\zeta(x)}{\zeta(x)} = 1$, donc on définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 25. La variable aléatoire X précédemment définie admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, |n\mathbb{P}(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-1}}$, cette convergence absolue a lieu si et seulement si $x - 1 > 1$, c'est-à-dire $x > 2$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}.$$

Q 26. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire X^k possède une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} n^k\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, |n^k\mathbb{P}(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-k}}$, cette convergence absolue a lieu si et seulement si $x - k > 1$, c'est-à-dire $x > k + 1$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}} = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}.$$

Q 27. Lorsque $x > 3$, la variable X^2 admet une espérance finie (d'après **Q 26.**), donc X possède une variance finie, qui vaut d'après la formule de Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\zeta(x-2)}{\zeta(x)} - \left(\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}\right)^2 = \frac{\zeta(x)\zeta(x-2) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

Q 28. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ se décompose en réunion dénombrable disjointe :

$$(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = an),$$

donc par σ-additivité, on obtient :

$$\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = an) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)(an)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x}\zeta(x) = \frac{1}{a^x}.$$

Q 29. Soit I une quelconque partie non vide de l'ensemble d'indices $\{1, \cdots, n\}$.

L'événement $\bigcap_{i\in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si q_i divise X pour tout $i \in I$. Les q_i ($i \in I$) étant des nombres premiers distincts, cela équivaut à $\prod_{i\in I} q_i$ divise X. Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}\left(X \in \left(\prod_{i\in I} q_i\right)\mathbb{N}^*\right).$$

D'après **Q 28.**, on sait calculer cette probabilité :

$$\mathbb{P}\left(X \in \left(\prod_{i\in I} q_i\right)\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{\left(\prod_{i\in I} q_i\right)^x} = \prod_{i\in I} \frac{1}{q_i^x} = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X \in q_i\mathbb{N}^*).$$

On a donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} (X \in q_i\mathbb{N}^*)\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X \in q_i\mathbb{N}^*)$ pour toute partie non vide $I \subset \{1, \cdots, n\}$, ce qui prouve l'indépendance mutuelle des événements $(X \in q_k\mathbb{N}^*)_{1\leq k\leq n}$.

Q 30. La suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_{n+1} = B_n \cap (X \notin p_{n+1}\mathbb{N}^*) \subset B_n.$$

D'après le théorème de continuité décroissante d'une probabilité, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right).$$

De plus, l'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si X n'est multiple d'aucun nombre premier, c'est-à-dire si et seulement si $X = 1$ (d'après les rappels d'arithmétique, tous les entiers $a \geq 2$ sont multiples d'au moins un nombre premier).
D'où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}(X=1)$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X=1)$.
Ensuite, on peut calculer explicitement $\mathbb{P}(B_n)$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'indépendance mutuelle des événements $(X \in p_k\mathbb{N}^*)_{1\leq k\leq n}$ établie en **Q 29.** implique l'indépendance mutuelle de leurs complémentaires $(X \notin p_k\mathbb{N}^*)_{1\leq k\leq n}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(X \in p_k\mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

Finalement, l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X=1)$ se réécrit :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{\zeta(x)1^x} = \frac{1}{\zeta(x)},$$

ce qui est l'égalité voulue.

Q 31. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $D_k = (X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si X ou Y n'est pas multiple du nombre premier p_k, c'est-à-dire si p_k ne divise pas X et Y simultanément. On en déduit $A = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} D_k$, donc aussi

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{n} D_k\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.$$

La suite $(C_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante pour l'inclusion (tout comme dans la question précédente), on obtient par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(C_n).$$

Calculons maintenant $\mathbb{P}(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements $(D_k)_{1\leq k\leq n}$ sont mutuellement indépendants car leurs complémentaires le sont. En effet, $\overline{D_k} = (X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*)$, donc pour toute partie $I \subset \{1, \cdots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\overline{D_i}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X \in p_i\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i\mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}\left(\left(X \in \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*\right) \cap \left(Y \in \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*\right)\right),$$

donc par indépendance des variables X et Y :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\overline{D_i}\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*\right) \times \mathbb{P}\left(Y \in \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X \in p_i\mathbb{N}^*)\right) \times \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(Y \in p_i\mathbb{N}^*)\right),$$

et en utilisant **Q 29.**, on déduit alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\overline{D_i}\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X \in p_i\mathbb{N}^*) \times \prod_{i\in I}\mathbb{P}(Y \in p_i\mathbb{N}^*) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}((X \in p_i\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_i\mathbb{N}^*)) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(\overline{D_i}).$$

Cette indépendance mutuelle des $(D_k)_{1\leq k\leq n}$ entraîne alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{P}(C_n)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(D_k)=\prod_{k=1}^{n}(1-\mathbb{P}(\overline{D_k}))=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\mathbb{P}(X\in p_k\mathbb{N}^*)\mathbb{P}(Y\in p_k\mathbb{N}^*)\right).$$

Mais X et Y suivent la même loi zêta de paramètre x, donc d'après **Q 28.** :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{P}(C_n)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{1}{p_k^x}\right)^2\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{2x}}\right).$$

On conclut en faisant tendre $n\to+\infty$ et en utilisant **Q 30.** avec $2x$ à la place de x :

$$\mathbb{P}(A)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(C_n)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{2x}}\right)=\frac{1}{\zeta(2x)}.$$

Q 32. Soient $n,k\in\mathbb{N}^*$. L'événement $(W_n\in k\mathbb{N}^*)$ est réalisé si et seulement si k divise le pgcd de U_n et V_n, c'est-à-dire k divise simultanément U_n et V_n. On a donc

$$(W_n\in k\mathbb{N}^*)=(U_n\in k\mathbb{N}^*)\cap(V_n\in k\mathbb{N}^*),$$

ce qui amène par indépendance des variables U_n et V_n :

$$\mathbb{P}(W_n\in k\mathbb{N}^*)=\mathbb{P}(U_n\in k\mathbb{N}^*)\times\mathbb{P}(V_n\in k\mathbb{N}^*)=\mathbb{P}(U_n\in k\mathbb{N}^*)^2,$$

vu que U_n et V_n suivent la même loi. Enfin, U_n suit la loi uniforme sur $\{1,\cdots,n\}$, donc

$$\mathbb{P}(U_n\in k\mathbb{N}^*)=\frac{\#\left(k\mathbb{N}^*\cap\{1,\cdots,n\}\right)}{n}.$$

Puisque les éléments de $k\mathbb{N}^*\cap\{1,\cdots,n\}$ sont les kq avec $1\leq q\leq\frac{n}{k}$ et q entier, on en déduit que $\#\left(k\mathbb{N}^*\cap\{1,\cdots,n\}\right)=\lfloor n/k\rfloor$, et donc

$$P(W_n\in k\mathbb{N}^*)=\left(\frac{\lfloor n/k\rfloor}{n}\right)^2.$$

Q 33. Fixons un réel $\varepsilon>0$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, W_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1,\cdots,n\}\subset\mathbb{N}^*$, donc la série $\sum\limits_{k\geq 1}\mathbb{P}(W_n=k)$ converge et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(W_n=k)=1$ (en fait $\mathbb{P}(W_n=k)=0$ dès que $k>n$). On a donc évidemment

$$\forall (n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2,\qquad \sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}(W_n=k)\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(W_n=k)=1.$$

  En passant à la limite lorsque $n\to+\infty$, on obtient

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^{m}\ell_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}(W_n=k)\leq 1.$$

- Pour établir que $\sum\limits_{k=1}^{m}\ell_k\geq 1-\varepsilon$ à partir d'un certain rang M, on utilise une majoration uniforme en n du reste de la série $\sum\limits_{k\geq 1}\mathbb{P}(W_n=k)$. Puisque

$$\forall (n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2,\qquad \mathbb{P}(W_n=k)\leq\mathbb{P}(W_n\in k\mathbb{N}^*)=\left(\frac{\lfloor n/k\rfloor}{n}\right)^2\leq\frac{1}{k^2},$$

  on en déduit :

$$\forall (n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2,\qquad \sum_{k=m+1}^{+\infty}\mathbb{P}(W_n=k)\leq\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=R_m$$

(puisque $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, le reste R_m est bien défini et on a $\lim_{m\to+\infty} R_m = 0$), et donc

$$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \qquad \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(W_n = k) = 1 - \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - R_m.$$

On considère alors un entier $M \geq 1$ tel que $\forall m \geq M,\ 0 \leq R_m \leq \varepsilon$. Dès lors :

$$\forall m \geq M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - \varepsilon.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient enfin

$$\forall m \geq M, \qquad \sum_{k=1}^{m} \ell_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(W_n = k) \geq 1 - \varepsilon.$$

Finalement, on a bien l'existence d'un entier M tel que $\forall m \geq M,\ \sum_{k=1}^{m} \ell_k \in [1-\varepsilon; 1]$.

Q 34. La question précédente montre que $\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \ell_k = 1$. Donc la série à termes positifs $\sum_{k\geq 1} \ell_k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k = 1$. La suite $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit donc bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Q 35. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k^2}$ (cela se montre facilement à partir de l'encadrement $\frac{n}{k} - 1 < \lfloor n/k \rfloor \leq \frac{n}{k}$). D'après **Q 28.**, on a donc

$$\mathbb{P}(W \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k^2} = \mathbb{P}(X \in k\mathbb{N}^*),$$

où X est n'importe quelle variable aléatoire suivant la loi zêta de paramètre $x = 2$. Ceci montre (en vertu du résultat admis) que W suit elle-même une loi zêta de paramètre $x = 2$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(W = k) = \frac{1}{\zeta(2) k^2}.$$

En considérant l'événement $(W = 1)$, on a la relation $\mathbb{P}(W = 1) = \dfrac{1}{\zeta(2)}$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \wedge V_n = 1) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Interprétation : si on choisit indépendamment deux nombres au hasard entre 1 et n, la probabilité que ces deux nombres soient "premiers entre eux" (i.e. sans diviseur commun autre que 1) tend vers $\frac{6}{\pi^2} \simeq 0,61$ lorsque $n \to +\infty$.