

## CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 12

## Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

18 FÉVRIER 2025

**Exercice 1.** Soient un espace euclidien  $E$  et une application  $f$  de  $E$  vers  $E$ . On dit que  $f$  :

- conserve la distance si  $\forall (u, v) \in E^2, \quad \|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$  ;
- conserve le produit scalaire si  $\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle f(u)|f(v) \rangle = \langle u|v \rangle$ .

1. Montrer que  $f$  conserve le produit scalaire si, et seulement si,  $f(0_E) = 0_E$  et  $f$  conserve la distance.
2. Donner un exemple d'application  $f$  qui conserve la distance mais telle que  $f(0_E) \neq 0_E$ .

1. Si  $f(0_E) = 0_E$  et  $f$  conserve la distance, alors :

$$\begin{aligned}
 \langle f(u)|f(v) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 - \|f(u) - f(v)\|^2) \quad (\text{identité de polarisation}) \\
 &= \frac{1}{2} (\|f(u) - f(0_E)\|^2 + \|f(v) - f(0_E)\|^2 - \|f(u) - f(v)\|^2) \quad \text{car } f(0_E) = 0_E \\
 &= \frac{1}{2} (\|u - 0_E\|^2 + \|v - 0_E\|^2 - \|u - v\|^2) \quad \text{car } f \text{ conserve la distance} \\
 &= \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2) \\
 &= \langle u|v \rangle \quad (\text{identité de polarisation}).
 \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $f$  conserve le produit scalaire, alors :  $\|f(0_E)\|^2 = \langle f(0_E)|f(0_E) \rangle = \langle 0_E|0_E \rangle = 0$ , d'où  $f(0_E) = 0_E$ . Et

$$\begin{aligned}
 \|f(u) - f(v)\|^2 &= \langle f(u)|f(u) \rangle + \langle f(v)|f(v) \rangle - 2\langle f(u)|f(v) \rangle \\
 &= \langle u|u \rangle + \langle v|v \rangle - 2\langle u|v \rangle \quad \text{car } f \text{ conserve le produit scalaire} \\
 &= \|u - v\|^2.
 \end{aligned}$$

2. Soient  $a$  un vecteur non nul de  $E$  et  $f$  la translation de vecteur  $a$ , définie par :  $\forall x \in E, f(x) = x + a$ . D'une part  $f(0_E) = a \neq 0_E$ . D'autre part  $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$  car  $f(u) - f(v) = (u + a) - (v + a) = u - v$ .

**Exercice 2.** Soit  $u$  une isométrie vectorielle d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer que toute valeur propre réelle de  $u$  appartient à  $\{-1; +1\}$ .
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(u + \text{id}_E)$  sont orthogonaux.
3. Soient  $F$  et  $G$  deux *sev* de  $E$ . Montrer que : si  $F \perp G$ , alors  $u(F) \perp u(G)$ .
4. Soit  $F$  un *sev* de  $E$ . Montrer que  $u(F^\perp) = (u(F))^\perp$ .

1. Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $u$ , alors il existe un vecteur non nul  $x \in E$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . D'où  $\|u(x)\| = |\lambda| \|x\|$ . Or  $u$  conserve la norme, d'où  $\|u(x)\| = \|x\|$ . Par suite  $\|x\| = |\lambda| \|x\|$ . En outre,  $x \neq 0_E$ , d'où  $\|x\| \neq 0$ , donc  $|\lambda| = 1$ .
2. Si  $x \in \text{SEP}(+1)$  et  $y \in \text{SEP}(-1)$ , alors  $u(x) = x$  et  $u(y) = -y$ , d'où  $\langle u(x)|u(y) \rangle = \langle x|-y \rangle = -\langle x|y \rangle$ . Mais  $u$  conserve le produit scalaire, d'où  $\langle u(x)|u(y) \rangle = \langle x|y \rangle$ . On en déduit que  $\langle x|y \rangle = 0$ . Donc  $\text{SEP}(+1) \perp \text{SEP}(-1)$ .
3. Commençons par remarquer que  $u(F)$  et  $u(G)$  sont bien des *sev* car ce sont les images de *sev* par une application linéaire. Soient  $x \in u(F)$  et  $y \in u(G)$  : on veut montrer que  $x \perp y$ .  
Il existe  $x_0 \in F$  et  $y_0 \in G$  tels que  $x = u(x_0)$  et  $y = u(y_0)$  :

$$\begin{aligned}
 \langle x|y \rangle &= \langle u(x_0)|u(y_0) \rangle \\
 &= \langle x_0|y_0 \rangle \quad \text{car } u \text{ est une isométrie} \\
 &= 0 \quad \text{car } x_0 \perp y_0 \quad \text{car } F \perp G.
 \end{aligned}$$

Donc  $u(F) \perp u(G)$ .

4.  $F \perp F^\perp$ , d'où (grâce à la question précédente) :  $u(F^\perp) \perp u(F)$ , ce qui équivaut à :  $u(F^\perp) \subset (u(F))^\perp$ .  
 Il reste à montrer l'autre inclusion et c'est une affaire de dimensions : d'une part,  $u$  est bijective, d'où  $\dim u(F^\perp) = \dim F^\perp$  et  $\dim u(F) = \dim F$ . D'autre part,  $E$  est de dimension finie, d'où  $\dim (u(F))^\perp = \dim E - \dim u(F)$  (car  $u(F)$  et  $(u(F))^\perp$  sont supplémentaires) et  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$  (car  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires).  
 D'où  $u(F^\perp) \subset (u(F))^\perp$  et ces deux *sev* ont même dimension, donc ils sont égaux.

**Exercice 3.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que :

$$\text{Ker}(u^*) = (\text{Im } u)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^*) = (\text{Ker } u)^\perp.$$

- On va prouver la propriété  $\heartsuit$  :  $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im } u)^\perp$  par double inclusion.

Montrons que  $\text{Ker}(u^*) \subset (\text{Im } u)^\perp$  : soient  $x \in \text{Ker}(u^*)$  et  $y \in \text{Im } u$ . Il existe  $z \in E$  tel que  $y = u(z)$ , d'où

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, u(z) \rangle \\ &= \langle u^*(x), z \rangle \quad \text{par définition de } u^* \\ &= 0 \quad \text{car } x \in \text{Ker}(u^*). \end{aligned}$$

Montrons que  $(\text{Im } u)^\perp \subset \text{Ker}(u^*)$  : soit  $y \in (\text{Im } u)^\perp$ . Alors  $\forall x \in E$ ,  $\langle y, u(x) \rangle = 0$ . Or  $\langle y, u(x) \rangle = \langle u^*(y), x \rangle$  par définition de  $u^*$ . D'où :  $\forall x \in E$ ,  $\langle u^*(y), x \rangle = 0$ . En particulier,  $\langle u^*(y), u^*(y) \rangle = 0$ . Donc  $u^*(y) = 0_E$ .

- On veut prouver que  $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker } u)^\perp$ . Or ces *sev* sont de dimension finie (donc égaux à l'orthogonal de leur orthogonal). La propriété est donc équivalente à  $\text{Im}(u^*)^\perp = \text{Ker } u$ . Il suffit de remplacer  $u$  par  $u^*$  dans la propriété  $\heartsuit$  car  $(u^*)^* = u$ .

**Exercice 4.** Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée. (Revoir les deux méthodes de [▷ l'exercice 14 du TD n° 4](#) et tenter une troisième méthode utilisant le théorème spectral.)

On remarque que le rang de la matrice  $A$  vaut 2 et que les deux vecteurs  $e_1 = (1, -1, 0, 0)$  et  $e_2 = (1, 0, -1, 0)$  sont libres et dans le noyau, donc forment une base de  $\text{SEP}(0)$ . Ils ne sont pas orthogonaux, on y remédie :

$$\begin{aligned} e'_2 = e_2 - \alpha e_1 \perp e_1 &\iff \langle e_2 - \alpha e_1 | e_1 \rangle = 0 \\ &\iff \langle e_2 | e_1 \rangle - \alpha \langle e_1 | e_1 \rangle = 0 \\ &\iff 1 - \alpha \times 2 = 0 \\ &\iff \alpha = 1/2 \\ &\iff e'_2 = (1/2, 1/2, -1, 0) \end{aligned}$$

Les autres sous-espaces propres sont orthogonaux à  $\text{SEP}(0)$  d'après le théorème spectral, donc leurs vecteurs  $(x, y, z, t)$  vérifient du système :

$$\begin{cases} x & -y & +0 & +0 & = & 0 \\ x & +0 & -z & +0 & = & 0 \end{cases}$$

et sont donc de la forme  $(x, x, x, t)$ .

ANALYSE – L'image d'un tel vecteur par  $A$  est :

$$A \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ 3x \end{pmatrix}.$$

S'il est propre et associé à une valeur propre  $\lambda$ , alors  $t = \lambda x$  et  $3x = \lambda t$ , d'où  $3x = \lambda^2 x$ . Et  $x \neq 0$ , d'où  $\lambda = \pm\sqrt{3}$ .

SYNTHÈSE – Les vecteurs propres  $e_3 = (1, 1, 1, \sqrt{3})$  et  $e_4 = (1, 1, 1, -\sqrt{3})$  sont propres et associés respectivement aux valeurs propres  $+\sqrt{3}$  et  $-\sqrt{3}$ . Ces valeurs propres sont distinctes, ces vecteurs propres sont donc orthogonaux. Une base orthogonale formée de vecteurs propres est donc :

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = ((1, -1, 0, 0), (1/2, 1/2, -1, 0), (1, 1, 1, \sqrt{3}), (1, 1, 1, -\sqrt{3})).$$

Une fois normés ces vecteurs, on obtient une *b.o.n.* formée de vecteurs propres :

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1/2, 1/2, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1, \sqrt{3}), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1, -\sqrt{3}) \right).$$

Matriciellement : la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ est telle que } P^T = P^{-1} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

### Exercice 5.

1. Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $E$ . Soient  $\lambda_{min}$  la plus petite valeur propre de  $u$  et  $\lambda_{max}$  la plus grande. Montrer que :

$$\forall x \in E, \lambda_{min}\langle x|x \rangle \leq \langle x|u(x) \rangle \leq \lambda_{max}\langle x|x \rangle.$$

2. Soit une matrice symétrique  $S = (s_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Soient  $\lambda_{min}$  la plus petite valeur propre de  $S$  et  $\lambda_{max}$  la plus grande. Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_{min} \leq s_{ii} \leq \lambda_{max}.$$

3. Soient deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les plus grandes valeurs propres de  $A^T \cdot A$  et de  $B^T \cdot B$  respectivement. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(AB), \lambda^2 \leq \alpha \cdot \beta.$$

1. L'endomorphisme  $u$  est autoadjoint, d'où (théorème spectral) il existe une base orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$  :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ . D'où, pour tout  $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \in E$ ,  $\langle x|u(x) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i | \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j \varepsilon_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \lambda_j x_j \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \lambda_j x_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ .  
Donc  $\lambda_{min}\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_{min} x_i^2 \leq \langle x|u(x) \rangle \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{max} x_i^2 = \lambda_{max}\|x\|^2$ .
2. On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique. L'endomorphisme  $u : X \mapsto S \cdot X$  est symétrique car sa matrice, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , est  $S$ . Or cette base est orthonormée et cette matrice est symétrique. On applique l'encadrement de la question précédente :  $\lambda_{min} X^T \cdot X \leq X^T \cdot S \cdot X \leq \lambda_{max} X^T \cdot X$ , pour tout vecteur colonne  $X$ . Choisissons pour vecteur  $X$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique :  $X^T \cdot X = 1$  et  $X^T \cdot S \cdot X = s_{ii}$ . Donc  $\lambda_{min} \leq s_{ii} \leq \lambda_{max}$ .
3. On déduit de l'encadrement de la première question, appliqué à l'endomorphisme représenté par la matrice symétrique  $A^T \cdot A$ , l'inégalité :  $X^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot X \leq \alpha X^T \cdot X$  Or  $X^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot X = (AX)^T \cdot (AX) = \|AX\|^2$ . D'où  $\|AX\|^2 \leq \alpha \|X\|^2$  pour tout  $X$ . De même,  $\|BX\|^2 \leq \beta \|X\|^2$  pour tout  $X$ .  
Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $AB$ , alors il existe un vecteur  $X$  non nul tel que  $(AB)X = \lambda X$ . D'où  $\|(AB)X\|^2 = \lambda^2 \|X\|^2$ . Or  $(AB)X = A(BX)$ , d'où  $\|(AB)X\|^2 \leq \alpha \|BX\|^2 \leq \alpha \beta \|X\|^2$ .  
D'où  $\lambda^2 \|X\|^2 \leq \alpha \beta \|X\|^2$ . Or le vecteur  $X$  n'est pas nul, donc :  $\lambda^2 \leq \alpha \cdot \beta$ .

**Exercice 6.** Soit  $E$  un espace euclidien,  $u$  un vecteur de  $E$  tel que  $\|u\| = 1$ . Pour chaque réel  $\alpha$ , on définit l'endomorphisme  $\varphi_\alpha$  par :

$$\forall x \in E, \varphi_\alpha(x) = x + \alpha \langle x, u \rangle u.$$

1. Interpréter géométriquement l'endomorphisme  $\varphi_{-1}$ . Calculer  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$ , l'endomorphisme  $\varphi_\alpha$  est-il bijectif ?
2. Déterminer un polynôme annulateur de l'endomorphisme  $\varphi_\alpha$ .
3. Montrer que  $\varphi_\alpha$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .
4. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. Est-il diagonalisable ?

5. Montrer que l'endomorphisme  $\varphi_\alpha$  est une isométrie vectorielle si, et seulement si,  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = -2$ . Reconnaître l'endomorphisme  $\varphi_\alpha$  dans ces deux cas.

1. Soit  $x \in E$  :

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta(x) &= \varphi_\beta(x) + \alpha \langle \varphi_\beta(x), u \rangle u = x + \beta \langle x, u \rangle u + \alpha \langle x + \beta \langle x, u \rangle u, u \rangle u = x + \beta \langle x, u \rangle u + \alpha \langle x, u \rangle u + \alpha \beta \langle x, u \rangle \langle u, u \rangle u \\ &= x + \beta \langle x, u \rangle u + \alpha \langle x, u \rangle u + \alpha \beta \langle x, u \rangle u = x + (\alpha + \beta + \alpha \beta) \langle x, u \rangle u = \varphi_{\alpha + \beta + \alpha \beta}(x).\end{aligned}$$

Si  $\alpha = -1$ , on reconnaît en  $\varphi_{-1}$  la projection orthogonale sur l'hyperplan orthogonal à  $u$ , qui n'est pas bijectif (de noyau  $\text{Vect}(u)$ ).

Sinon, le calcul ci-dessus montre que  $\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha/(1+\alpha)} = \text{id}_E = \varphi_{-\alpha/(1+\alpha)} \circ \varphi_\alpha$ , donc que  $\varphi_\alpha$  admet une réciproque, donc est bijectif.

2. En reprenant le calcul précédent dans le cas particulier où  $\alpha = \beta$ , on trouve :

$$\forall x \in E, \varphi_\alpha^2(x) = (2 + \alpha)\varphi_\alpha(x) - (1 + \alpha)x.$$

D'où  $\varphi_\alpha^2 = (2 + \alpha)\varphi_\alpha - (1 + \alpha)\text{id}_E$ . Donc, le polynôme  $X^2 - (2 + \alpha)X + (1 + \alpha)$  est annulateur de  $\varphi_\alpha$ .

3. Soit  $x, y \in E$ . On a :

$$\begin{aligned}\langle \varphi_\alpha(x) | y \rangle &= \langle x + \alpha \langle x, u \rangle u | y \rangle \\ &= \langle x | y \rangle + \alpha \langle x, u \rangle \langle u | y \rangle \\ &= \langle x | y \rangle + \langle x, \alpha \langle u | y \rangle u \rangle \\ &= \langle x, y + \alpha \langle y | u \rangle u \rangle \\ &= \langle x, \varphi_\alpha(y) \rangle.\end{aligned}$$

4. On construit une base adaptée. Le vecteur  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $1 + \alpha$ . Si un vecteur  $x$  est orthogonal à  $u$ , alors  $\varphi_\alpha(x) = x$ . Si  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n_1})$  est une base de  $[\text{Vect}(u)]^\perp$ , alors  $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n_1}, u)$  est une base de l'ev  $E$  car  $\text{Vect}(u) \oplus [\text{Vect}(u)]^\perp = E$ . Cette base est formée de vecteurs propres de  $\varphi_\alpha$ , donc  $\varphi_\alpha$  est diagonalisable et son spectre est  $\{1; 1 + \alpha\}$ .

REMARQUES :

- on peut répondre, en arguant du théorème spectral, que  $\varphi_\alpha$  est diagonalisable comme tout endomorphisme autoadjoint, mais le théorème spectral ne donne pas le spectre ;
  - on peut aussi constater que le polynôme annulateur  $X^2 - (2 + \alpha)X + (1 + \alpha)$  est égal à  $(X - 1)(X - (1 + \alpha))$  et en déduire que  $\text{Sp}(\varphi_\alpha) \subset \{1; 1 + \alpha\}$  ;
  - dans le cas où  $\alpha \neq 0$ , le polynôme  $X^2 - (2 + \alpha)X + (1 + \alpha) = (X - 1)(X - (1 + \alpha))$  est non seulement annulateur de  $\varphi_\alpha$  mais il est aussi scindé à racines simples, on en déduit que  $\varphi_\alpha$  est diagonalisable ;
  - du spectre, on déduit que 0 est une valeur propre de  $\varphi_\alpha$  si, et seulement si,  $\alpha = -1$ . On retrouve ainsi que  $\varphi_\alpha$  est bijectif si, et seulement si,  $\alpha \neq -1$ .
5. Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ . Il existe un unique couple  $(x_1, x_2) \in \text{Vect}(u) \times \text{Vect}(u)^\perp$  et un unique couple  $(y_1, y_2) \in \text{Vect}(u) \times \text{Vect}(u)^\perp$  tel que  $x = x_1 + x_2$  et  $y = y_1 + y_2$ . On a donc

$$\begin{aligned}\langle x | y \rangle &= \langle x_1 + x_2 | y_1 + y_2 \rangle \\ &= \langle x_1 | y_1 \rangle + \langle x_2 | y_1 \rangle + \langle x_1 | y_2 \rangle + \langle x_2 | y_2 \rangle \\ &= \langle x_1 | y_1 \rangle + \langle x_2 | y_2 \rangle\end{aligned}$$

De même on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}\langle \varphi_\alpha(x) | \varphi_\alpha(y) \rangle &= \langle \varphi_\alpha(x_1 + x_2) | \varphi_\alpha(y_1 + y_2) \rangle \\ &= \langle (1 + \alpha)x_1 + x_2 | (1 + \alpha)y_1 + y_2 \rangle \\ &= (1 + \alpha)^2 \langle x_1 | y_1 \rangle + \langle x_2 | y_2 \rangle\end{aligned}$$

Donc  $\varphi_\alpha$  est une isométrie si, et seulement si, pour tous  $x_1$  et  $y_1$  dans  $\text{Vect}(u)$ ,

$$(1 + \alpha)^2 \langle x_1 | y_1 \rangle = \langle x_1 | y_1 \rangle.$$

Si  $(1 + \alpha)^2 = 1$ , alors  $\varphi_\alpha$  est une isométrie. Réciproquement :  $\varphi_\alpha$  est une isométrie alors dans le cas particulier où  $x_1 = y_1 = u$ ,  $(1 + \alpha)^2 = 1$ . Donc  $\varphi_\alpha$  est une isométrie si, et seulement si,  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = -2$ .

Si  $\alpha = 0$ , alors  $\varphi_\alpha$  est l'identité. Si  $\alpha = -2$ , alors  $\varphi_\alpha$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\text{Vect}(u)^\perp$ .

**Exercice 7** (Matrices symétriques positives). Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

1. Soit  $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ . Montrer que la matrice  $B^T B$  est une matrice symétrique positive, *i.e.*  $B^T B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $A$  une matrice symétrique, *i.e.*  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A$  est définie positive si, et seulement si, elle est positive et inversible.

3. Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ . Et que cette matrice  $B$  est unique. On l'appelle la **racine carrée** de  $A$ .

- D'une part, la matrice  $B^T B$  est carrée :  $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ , d'où  $B^T \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  et  $B^T B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ . D'autre part, elle est symétrique car  $(B^T \cdot B)^T = B^T \cdot (B^T)^T = B^T \cdot B$ . Enfin, elle est positive car :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), X^T(B^T B)X = (BX)^T(BX) = \|BX\|^2 \geq 0$ .
- Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  une matrice symétrique positive. On veut montrer qu'elle est définie positive si, et seulement si, elle est inversible. Si  $A$  n'est pas inversible, alors il existe un vecteur colonne  $X$  non nul tel que  $AX = 0$ . D'où  $X^T A X = 0$ , donc la matrice  $A$  n'est pas définie positive. Réciproquement : si  $A$  est inversible, alors 0 n'appartient pas à  $\text{Sp}(A)$ , d'où toutes les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives, donc  $A$  est définie positive.
- Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  est symétrique, d'où, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que la matrice  $D = P^T A P$  est diagonale. La matrice  $A$  est positive, d'où la matrice  $D$  s'écrit  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où les valeurs propres  $\lambda_i$  sont positives, ce qui permet de définir la matrice  $C = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ . Alors  $A = P C^2 P^T = P C P^T P C P^T = B^2$ , où la matrice  $B = P C P^T$  est :
  - symétrique car  $B^T = P C^T P^T = B$  car  $C^T = C$  ;
  - positives car ses valeurs propres  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$  sont positives.

Reste à prouver l'unicité (revoir aussi [▷ Kdo du 8/11/2024](#)) :

• PREMIÈRE RÉDACTION (SANS MATRICES) : soit  $a$  l'endomorphisme représenté, dans une *bon* d'un espace euclidien  $E$ , par la matrice  $A$ . Si  $a = b \circ b$ , alors  $b$  commute avec  $a$ , d'où les *sep* de  $a$  sont stables par  $b$ . Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $a$ ,  $E_\lambda(a)$  le *sep* de  $a$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et  $b_\lambda$  l'endomorphisme induit par  $b$  sur ce *sep* ( $b_\lambda$  est bien défini car  $E_\lambda(a)$  est stable par  $b$ ).

D'une part,  $b_\lambda \circ b_\lambda = \text{Id}_{E_\lambda(a)}$ . Par suite toutes les valeurs propres de  $b_\lambda$  ont pour carré  $\lambda$ , donc sont égales à  $\pm\sqrt{\lambda}$ . De plus  $b$  est, par hypothèse, un endomorphisme autoadjoint positif. Par suite, toutes ses valeurs propres sont positives. Par suite, toutes les valeurs propres de  $b_\lambda$  sont égales à  $+\sqrt{\lambda}$ .

D'autre part, l'endomorphisme  $b_\lambda$  est autoadjoint car l'endomorphisme  $b$  l'est. Par suite  $b_\lambda$  est diagonalisable.

On en déduit que  $b_\lambda = +\sqrt{\lambda} \text{Id}_{E_\lambda(a)}$  est déterminé de manière unique pour chaque  $\lambda \in \text{Sp}(a)$ . Et donc l'endomorphisme  $b$  est unique.

• SECONDE RÉDACTION (AVEC MATRICES) : on sait déjà que la matrice  $D = P^T A P$  est diagonale. La matrice  $B$  commute avec  $A = B^2$ , donc les *sep* de  $A$  sont stables par  $B$ . Par suite la matrice  $C = P^T B P$  est, non seulement symétrique comme on le sait déjà, mais aussi diagonale par blocs :

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} \overleftarrow{d_1} & \overleftarrow{d_2} & \dots & \overleftarrow{d_r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & \vdots & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_2 I_{d_2} & \vdots & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & \mathbf{0} & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \vdots & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{matrix} & \begin{matrix} \overleftarrow{d_1} & \overleftarrow{d_2} & \dots & \overleftarrow{d_r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} d_1 \updownarrow \\ d_2 \updownarrow \\ \vdots \\ d_r \updownarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} B_1 & \vdots & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & B_2 & \vdots & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & \mathbf{0} & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \vdots & & B_r \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Et, pour chaque  $i$ ,  $B_i^2 = \lambda_i I_{d_i}$  car  $C^2 = D$  d'une part. D'autre part, le bloc  $B_i$  appartient à  $\mathcal{S}_{d_i}^+(\mathbb{R})$  car la matrice  $C$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Le bloc  $B_i$  est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont positives et leur carré vaut  $\lambda_i$ . D'où  $B_i = +\sqrt{\lambda_i} I_{d_i}$ . Ceci détermine complètement la matrice  $C$  et donc aussi la matrice  $B = P C P^T$ , ce qui prouve qu'elle est unique.

**Exercice 8.** Soient  $E$  un espace euclidien,  $\lambda$  un réel et  $f$  une isométrie vectorielle de  $E$  telle que  $(f - \lambda \text{Id}_E)^2 = 0$ .

- Montrer que  $(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E))^\perp$  est stable par  $f$ .
- En déduire que  $(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E))^\perp = \{0_E\}$ .
- Conclure que  $f = \pm \text{Id}_E$ .

- Les endomorphismes  $f$  et  $g = f - \lambda \text{Id}_E$  commutent, d'où : le *sev*  $G = \text{Ker}(g)$  est stable par  $f$  [▷ prop. 16 du chap. II](#). L'endomorphisme  $f$  est une isométrie vectorielle, d'où (stabilité de l'orthogonal [▷ proposition 18 du chapitre XII](#)) :  $G^\perp$  est aussi stable par  $f$ . Donc  $(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E))^\perp$  est stable par  $f$ .
- Notons  $G = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ . Soit  $x \in G^\perp$ . On veut montrer que ce vecteur  $x$  est nul :

- d'une part  $(f - \text{id}_E)(x) \in G^\perp$  par stabilité de  $G^\perp$  (question précédente);
- d'autre part  $(f - \text{id}_E)(x) \in G$  car  $(f - \text{id}_E)^2 = 0$  (par hypothèse).

D'où  $(f - \text{id}_E)(x) \in G \cap G^\perp$ . Or  $G \cap G^\perp = \{0_E\}$ , d'où  $(f - \text{id}_E)(x) = 0_E$ , autrement dit  $x \in G$ . Or  $x \in G^\perp$  depuis le début. Donc  $x = 0_E$ . C'est ce qu'on voulait montrer.

- Le sev  $G = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$  est de dimension finie, d'où :  $(G^\perp)^\perp = G$ , d'où  $G = \{0_E\}^\perp$  d'après la question précédente. Donc  $(\text{Ker}(f - \text{id}_E))^\perp = E$  : pour tout  $x \in E$ ,  $(f - \text{id}_E)(x) = 0$ . Donc  $f = \text{id}_E$ .  
Pour tout vecteur non nul  $x \in E$ ,  $f(x) = \lambda x$ . D'où  $\|f(x)\| = |\lambda| \|x\|$ . Or  $f$  conserve la norme car c'est une isométrie, d'où  $\|f(x)\| = \|x\|$ . Par suite  $\|x\| = |\lambda| \|x\|$ . En outre,  $x \neq 0_E$ , d'où  $\|x\| \neq 0$ , donc  $|\lambda| = 1$ .

**Exercice 9.** Écrire la matrice, dans la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathbb{R}^3$ , de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{6}$  autour de l'axe dirigé et orienté par  $\vec{i} + \vec{j}$ .

On cherche la matrice  $A$ , dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , de la rotation  $f$  d'axe dirigé et orienté par  $\vec{i} + \vec{j}$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

Le vecteur (normé)  $\vec{w} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$  dirige et oriente l'axe de rotation. Un vecteur normal à l'axe de rotation (et normé) est  $\vec{u} = \vec{k}$ . En posant  $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$ , on obtient une base orthonormée directe  $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  adaptée à la rotation  $f$ . Dans cette nouvelle base, la matrice de  $f$  est :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la vieille base  $\mathcal{B}$  à la nouvelle base  $\mathcal{B}'$ . D'où  $A = PA'P^{-1}$ . Or la vieille et la nouvelle bases sont orthonormées, d'où les colonnes de la matrice  $P$  forment une *bon*, donc  $P^{-1} = P^T$  et

$$\begin{aligned} A = P \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

REMARQUES (comment vérifier le résultat) :

- les colonnes de la matrice  $A$  forment une *b.o.n.d.* car les vecteurs  $f(u), f(v)$  et  $f(w)$  sont les images respectives par la rotation  $f$  des vecteurs  $u, v$  et  $w$  qui formaient une *b.o.n.d.*;
- l'axe de la rotation  $f$  est dirigé par  $\vec{w}$ , d'où  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;
- la trace de la matrice  $A$  est égale à celle de la matrice  $A'$ , c'est-à-dire à  $1 + 2 \cos \frac{\pi}{6}$ .

**Exercice 10** (tiré de CCINP 2019 TSI Math 2). On munit l'espace vectoriel  $E = S_2(\mathbb{R})$  des matrices  $2 \times 2$  symétriques du produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ .

- Un cas particulier — Montrer que l'application  $f$  qui, à toute matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , associe la matrice  $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$  est une rotation de  $E$  qui conserve la trace et le déterminant :  $f \in SO(E)$  et  $\forall M \in E$ ,  $\text{tr } f(M) = \text{tr } M$  et  $\det f(M) = \det M$ . Déterminer les sous-espaces propres de  $f$ .
- Le cas général — Soit  $f$  une isométrie de  $E$  laissant invariante la matrice identité :  $f \in O(E)$  et  $f(I_2) = I_2$ . Montrer que  $f$  conserve la trace et le déterminant.

1. L'application  $f : E \rightarrow E$  est un endomorphisme car elle est linéaire et l'image de toute matrice symétrique  $2 \times 2$  est encore une matrice symétrique  $2 \times 2$ .

L'endomorphisme  $f$  est une rotation de  $E$  ssi sa matrice dans une *b.o.n.* de  $E$  est spéciale orthogonale  $\triangleright$  **définition XII.28**.

L'ev  $E = S_2(\mathbb{R})$  est de dimension 3. Les trois matrices

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base  $(I, J, K)$  de l'ev  $E$  des matrices  $2 \times 2$  symétriques. Et cette base est orthonormée pour le produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ .

Parce que  $f(I) = I$ ,  $f(J) = K$  et  $f(K) = -J$ , la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans cette base  $(I, J, K)$  est

$$[f]_{(I, J, K)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(I) & f(J) & f(K) \end{matrix} \\ \begin{matrix} I \\ J \\ K \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Cette matrice est orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée. De plus, son déterminant vaut 1, elle appartient donc à  $SO_3(\mathbb{R})$ . L'application  $f$  est donc une rotation de  $E$ .

De plus  $f$  conserve la trace car  $\text{tr} f(M) = \frac{a+c}{2} - b + \frac{a+c}{2} + b = a + c = \text{tr} M$ . Et conserve le déterminant car  $\det f(M) = \left(\frac{a+c}{2} - b\right) \left(\frac{a+c}{2} + b\right) - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = ac - b^2 = \det M$ .

Soit  $\chi_f$  Le polynôme caractéristique de  $f$  : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\chi_f(x) = \det(x \text{id}_E - f) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1).$$

D'où  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \{1\}$  et  $1 \leq \dim \text{SEP}(1) \leq 1$ . Or  $f(I) = I$ . Donc  $\text{SEP}(1) = \text{Vect}(I)$ .

2. L'endomorphisme  $f$  de la question précédente est bien un cas particulier car c'est une rotation, donc une isométrie. Et  $f(I_2) = I_2$ , donc il laisse invariante la matrice identité.

Dans le cas général : si  $f$  est une isométrie, alors  $f$  conserve le produit scalaire. En particulier :  $\heartsuit \begin{cases} \langle M, I_2 \rangle = \langle f(M), f(I_2) \rangle \\ \langle M, M \rangle = \langle f(M), f(M) \rangle \end{cases}$

pour toute matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

D'une part  $\langle M, I_2 \rangle = a \times 1 + b \times 0 + b \times 0 + c \times 1 = a + c = \text{tr} M$ . Et  $f(I_2) = I_2$  par hypothèse, d'où  $\langle f(M), f(I_2) \rangle = \langle f(M), I_2 \rangle = \text{tr} f(M)$ . Donc l'application  $f$  conserve la trace.

D'autre part  $\langle M, M \rangle = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 = a^2 + 2b^2 + c^2$ . D'où  $\langle M, M \rangle - \langle M, I_2 \rangle^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 - (a+c)^2 = 2b^2 - 2ac = -2(ac - b^2) = -2 \det M$ . De même,  $\langle f(M), f(M) \rangle - \langle f(M), I_2 \rangle^2 = -2 \det f(M)$ .

De  $\heartsuit$  et de  $f(I_2) = I_2$ , on déduit que  $-2 \det f(M) = -2 \det M$ . Donc  $f$  conserve le déterminant.

**Exercice 11** (Endomorphismes normaux). Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  tel que  $u \circ u^* = u^* \circ u$ . (On dit d'un tel endomorphisme qu'il est **normal**.)

1. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$ .
2. En déduire que  $u$  et  $u^*$  ont les mêmes spectre et sous-espaces propres.
3. Montrer que, si un *sev*  $F$  est stable par  $u$ , alors son orthogonal  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .
4. On suppose que  $\dim E = 2$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme autoadjoint ou la composée d'une homothétie et d'une rotation.

1. Soit  $(x, y) \in E^2$  :  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^* \circ u(x), y \rangle$  par définition de l'adjoint. Or  $u^* \circ u = u \circ u^*$  par hypothèse. Donc  $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u \circ u^*(x), y \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$  par définition de l'adjoint.

2. Soit un vecteur  $x \in E$  et un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $\|u^*(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 - 2\lambda \langle u^*(x), x \rangle + \lambda^2 \|x\|^2$ .

Or  $\|u^*(x)\|^2 = \|u(x)\|^2$  d'après la première question et  $\langle u^*(x), x \rangle = \langle x, u(x) \rangle$  par définition de l'adjoint.

D'où  $\|u^*(x) - \lambda x\|^2 = \|u(x) - \lambda x\|^2$ . On en déduit que  $x$  est un vecteur propre de  $u^*$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si, et seulement si, c'est un vecteur propre de  $u$  associé à la même valeur propre. L'endomorphisme  $u$  et son adjoint ont donc les mêmes éléments propres.

3. On se place dans une base adaptée  $\mathcal{B}$  obtenue en concaténant une *bon* de  $F$  et une *bon* de  $F^\perp$ . La base  $\mathcal{B}$  est ainsi une *bon* de  $E$ . Soit  $M = [u]_{\mathcal{B}}$  la matrice de  $u$  dans cette base.

D'une part, parce que le *sev*  $F$  est stable par  $u$ , la matrice  $M$  est triangulaire par blocs :  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ .

D'autre part, parce que la base  $\mathcal{B}$  est orthonormée,  $[u^*]_{\mathcal{B}} = M^T$ , d'où  $[u^*]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & C^T \end{pmatrix}$ .

L'endomorphisme  $u$  est normal, d'où  $u \circ u^* = u^* \circ u$ , donc  $M \cdot M^T = M^T \cdot M$ . Par suite : 
$$\begin{cases} A \cdot A^T + B \cdot B^T = A^T \cdot A \\ B \cdot C^T = A^T \cdot B \\ C \cdot B^T = B^T \cdot A \\ C \cdot C^T = B^T \cdot B + C^T \cdot C \end{cases}.$$

De la première équation, on déduit que  $B \cdot B^T = A^T \cdot A - A \cdot A^T$  et, par suite,  $\text{tr}(B \cdot B^T) = \text{tr}(A^T \cdot A - A \cdot A^T)$ . Or  $\text{tr}(A^T \cdot A - A \cdot A^T) = \text{tr}(A^T \cdot A) - \text{tr}(A \cdot A^T) = 0$ . Et  $\text{tr}(B \cdot B^T) = \|B\|^2$ , en utilisant la norme usuelle d'une matrice carrée. D'où  $\|B\|^2 = 0$ , donc  $B = 0$ .

La matrice  $M$  est donc diagonale par blocs :  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , ce qui implique que le *sev*  $F^\perp$  est stable  $u$ .

4. On se place dans un *bon* de  $E$ . Dans cette base, l'endomorphisme  $u$  est représenté par une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  et, parce que la base est orthonormée, son adjoint  $u^*$  est représenté par la matrice transposée  $A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  :

$u \circ u^* = u^* \circ u$  d'où  $A \cdot A^T = A^T \cdot A$  d'où  $b^2 = c^2$  et  $ab + cd = ac + bd$ .

Premier cas :  $b = c$ . Alors  $A = A^T$ , d'où  $u = u^*$  est autoadjoint.

Second cas :  $b = -c$ . Alors  $ab + cd = ac + bd$ , d'où ( $b = c = 0$  ou  $a = d$ ).

Dans le premier sous-cas, la matrice  $A$  est diagonale donc symétrique, d'où  $u$  est auto-adjoint. Dans le second sous-cas, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $A$  est donc le produit de  $\sqrt{a^2 + b^2} I_2$ , matrice d'une homothétie et de  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , matrice d'une rotation.

**Exercice 12** (Le produit vectoriel). Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté  $E$  de dimension 3.

1. Soient deux vecteurs  $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \in E$  et  $\vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k} \in E$ . Montrer qu'il existe un unique vecteur  $\vec{a} \in E$  tel que :  $\forall \vec{u} \in E, \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{a}$ .

Ce vecteur est noté  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  et est appelé le **produit vectoriel** des vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

2. Montrer que :  $\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k}$ .
3. À quelle condition le produit vectoriel  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  est-il nul ? Cette condition est-elle nécessaire ? suffisante ?
4. Montrer que, si  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont deux vecteurs non colinéaires, alors le vecteur  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  est orthogonal au plan  $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ . Et que  $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w})$  est une base directe.
5. Montrer que :

$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v}) (\vec{w} \cdot \vec{w}).$$

En déduire que la norme du vecteur  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , autrement dit :

$$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| |\sin(\vec{v}, \vec{w})|.$$

1. L'application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, \vec{u} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une forme linéaire (car le déterminant est multilinéaire) et l'*ev*  $E$  est de dimension finie. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique vecteur  $\vec{a}$  tel que :  $\forall \vec{u} \in E, \varphi(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{a}$ .
2. On développe le déterminant  $3 \times 3$  en suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}.$$

La base  $\mathcal{B}$  étant orthonormée, on reconnaît le produit scalaire du vecteur  $\vec{a}$  de coordonnées  $(u_1, u_2, u_3)$  et d'un vecteur  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  de coordonnées

$$\left( \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$



3. Si  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont liés, alors  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$  pour tout  $\vec{u} \in E$ , d'où :  $\forall \vec{u} \in E, \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$ . En particulier,  $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$ , donc  $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ . Réciproquement, si la famille  $(\vec{v}, \vec{w})$  n'est pas liée, alors on peut la compléter en une base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  dont le déterminant  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$  n'est pas nul, donc  $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$ .
4.  $\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ , d'où  $\vec{v} \perp (\vec{v} \wedge \vec{w})$ . De même pour  $\vec{w}$ . De plus, par définition du produit vectoriel,  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$  est strictement positif car  $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$  d'après la question précédente.
5. Grâce à la formule de la question 2, on vérifie par le calcul que :  $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{w})$ . Par suite,  $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \cos^2(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \sin^2(\vec{v}, \vec{w})$ .

**Exercice 13.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique.

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de la matrice  $A$  et  $X \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre associé.  
En calculant  $X^T \cdot A \cdot \bar{X}$ , montrer que  $\lambda$  est imaginaire pur, autrement dit : que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$ .
2. Montrer que les matrices  $I_n - A$  et  $I_n + A$  sont inversibles.
3. Vérifier que les matrices  $I_n - A$  et  $(I_n + A)^{-1}$  commutent.
4. Montrer que la matrice  $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$  est orthogonale.
5. La matrice  $R$  appartient-elle à  $SO_n(\mathbb{R})$ ?

1. D'une part,  $A$  est antisymétrique, d'où :  

$$X^T \cdot A \cdot \bar{X} = -(AX)^T \cdot \bar{X} = -(\lambda X)^T \cdot \bar{X} = -\lambda(X^T \bar{X}).$$
D'autre part, les coefficients de  $A$  sont réels, d'où :  

$$X^T \cdot A \cdot \bar{X} = X^T \cdot \overline{AX} = X^T \bar{\lambda} \bar{X} = \bar{\lambda}(X^T \bar{X}).$$
Or  $X^T \bar{X} = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \neq 0$  car  $X \neq 0$ . D'où  $\bar{\lambda} = -\lambda$ . Donc  $\lambda \in i\mathbb{R}$ .
2. La matrice  $I_n - A$  est inversible si, et seulement si,  $\text{Ker}(I_n - A) = \{0\} \iff 1 \notin \text{Sp}(A)$ . D'après la question précédente,  $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ , donc  $I_n - A$  est inversible. De même  $I_n + A$  est inversible.
3. Les matrices  $I_n - A$  et  $I_n + A$  commutent :  $(I_n - A)(I_n + A) = (I_n + A)(I_n - A)$ .  
Multiplions à droite par  $(I_n + A)^{-1}$  :  $(I_n - A) = (I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ .  
Puis multiplions à gauche par  $(I_n + A)^{-1}$  :  

$$(I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}.$$
Donc les matrices  $I_n - A$  et  $(I_n + A)^{-1}$  commutent.
4. La matrice  $R$  est orthogonale car
$$\begin{aligned} R \cdot R^T &= (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \cdot (I_n - A)^T [(I_n + A)^{-1}]^T \\ &= (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \cdot (I_n - A)^T [(I_n + A)^T]^{-1} \\ &= (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \cdot (I_n + A) [(I_n - A)]^{-1} \\ &= (I_n + A)^{-1}(I_n + A) \cdot (I_n - A) [(I_n - A)]^{-1} \\ &= I_n \cdot I_n = I_n. \end{aligned}$$
5.  $\det(I_n - A) = \det(I_n - A)^T = \det(I_n + A)$  et  $\det(I_n + A)^{-1} = \frac{1}{\det(I_n + A)}$ , d'où  $\det R = +1$ . La matrice  $R$  est orthogonale et son déterminant vaut  $+1$ , donc elle appartient à  $SO_n(\mathbb{R})$ .