Colle n° 17

E.v.n.

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$h_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto n^2 x \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction h_n et représenter graphiquement la fonction h_n.
2. Calculer $\|h_n\|_1$ et $\|h_n\|_\infty$.
3. La suite h_n est-elle bornée pour la norme ∞ ? Et pour la norme 1 ?
4. Existe-t-il un réel α tel que : $\forall f \in \mathcal{C}([0,1]),\ \|f\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f\|_1$?
5. Existe-t-il un réel β tel que : $\forall f \in \mathcal{C}([0,1]),\ \|f\|_1 \leq \beta \cdot \|f\|_\infty$?

Exercice 2 (oral Centrale PC 2011)**.**

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme donnée par $\forall f \in E,\ \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soient

$$\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 f \quad \text{et} \quad \Psi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|.$$

Montrer que Φ et Ψ sont des applications continues de $(E, \|\ \ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$.

Soit A l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que :

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t)dt = 1.$$

Pour tout vecteur $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on appelle *distance de f à A* et on note $d(f,A)$ le réel $d(f,A) = \inf_{a \in A} \|f - a\|$
▷ **exo 13 du TD n° 11**.

1. Montrer que l'ensemble A est un fermé de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que la distance de la fonction nulle à l'ensemble A est égale à 1 : $d(0,A) = 1$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in A$ telle que $d(0,A) = d(0,f)$ (autrement dit : que cet *inf* n'est pas un *min*).