FEUILLE DE T.D. N° 20

Calcul différentiel

Exercice 1. Les fonctions suivantes définies par

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+2y^2}\quad,\qquad g(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}\quad,\quad h(x,y)=\frac{x^3+y^4}{|x|+y^2}$$

pour tout $(x,y)\neq(0,0)$ et par $f(0,0)=g(0,0)=h(0,0)=0$ sont-elles continues en $(0,0)$?

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\dfrac{y^4}{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ pour tout $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$, que $\partial_1 f(0,0)$ existe mais que $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4 (Dériver suivant un vecteur)**.** Soient un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, un point $a=(a_1,a_2)\in U$ et un vecteur $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ est **dérivable en le point a suivant le vecteur v** si la limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

existe et est finie. On note alors $D_v f(a)$ cette limite et on l'appelle la dérivée de f en a suivant v.

1. Montrer que : si f est dérivable en a suivant tout vecteur v, alors f admet des dérivées partielles en a.
2. Soit $g(x,y)=\dfrac{x^2\cdot y}{x^4+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$.
   (a) Montrer que la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$.
   (b) Montrer que g est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur (x,y).
3. Montrer que : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f est dérivable en tout point $a\in U$ suivant tout vecteur v et exprimer $D_v f(a)$ à l'aide des dérivées partielles de f en a.
   La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\varphi(x^2+y^2)$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}$. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Soit la fonction $g:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\varphi(\frac{y}{x})$.
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 6. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \mapsto f(x)$ est **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et homogène de degré α, alors

1. les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont homogènes de degré $\alpha - 1$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^2, \quad x_1\partial_1 f(x) + x_2\partial_2 f(x) = \alpha f(x)$.

Exercice 7 (Une équation aux dérivées partielles)**.** En passant en coordonnées polaires, déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall (x,y) \neq (0,0), \quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Exercice 8.

1. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de la fonction f dzfinie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$
En chaque point critique, préciser s'il y a un extremum local, si c'est un minimum ou un maximum et s'il est global.
2. Déterminer l'ensemble de définition de
$$f(x,y) = x\ln^2 x + xy^2.$$
Étudier les points critiques de la fonction f, ses extrema locaux et ses extrema globaux.

Exercice 9. Déterminer tous les extrema locaux de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sin(xy).$$

Pour chacun d'entre eux, préciser si c'est un minimum ou un maximum et s'il est global.

Exercice 10. On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant l'équation suivante :

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y) \quad (\star)$$

1. Démontrer que, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie $(\star)$, alors :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$
2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles précédente et en déduire l'ensemble des solutions de $(\star)$.