Chapitre 13
Intégrale à paramètre

1. Généralités

Exemple 1.

On définit la fonction Γ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

L'objectif de ce chapitre est de fournir les outils permettant d'étudier cette fonction.

1. Le domaine de définition de Γ se trouve en cherchant les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ existe : il s'agit donc d'exploiter les outils du chapitre «Intégrer sur un intervalle».
2. La continuité et la dérivabilité font l'objet des deux théorèmes principaux de ce chapitre, et reposent sur le théorème de convergence dominée (chapitre «Suites de fonctions»).

Remarque 2.

Comme pour l'exemple précédent, nous étudierons dans ce chapitre une fonction g définie par une intégrale :

$$g(x) = \int_T f(x,t)dt$$

où f est une fonction définie sur $X \times T$, X et T deux intervalles, à valeurs réelles.

Les variables x et t ne jouent pas le même rôle dans l'expression ci-dessus : on dit que x est le *paramètre* et t la *variable*.

Pour que g soit définie, on suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T et que l'intégrale $\displaystyle\int_T f(x,t)dt$ converge.

Exemple 3.

1. Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

2. Continuité

Théorème 4. continuité sous le signe intégral

Avec les notations précédentes, si

(1) pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T ;

(2) pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;

(3) il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x,t) \in X \times T$, $|f(x,t)\,| \leq \varphi(t)$

alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_T f(x,t)dt$ est continue sur X.

Preuve. Soit $x \in X$. Pour prouver la continuité de g en x, nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit (x_n) une suite de réels de limite x et on définit la suite de fonctions (f_n) par

$$\forall t \in T, f_n(t) = f(x_n, t).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur T et comme la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (on rappelle que x est fixé), la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto f(x,t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n, t)| \leq \varphi(t)$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_T f_n(t)dt\right)$ converge vers $\int_T f(x,t)dt$, et donc la suite $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(x)$.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite, g est continue en x.

□

Exemple 5.

(1) Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
(2) Montrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

3. Dérivabilité

Théorème 6. dérivation sous le signe intégral

Avec les notations du paragraphe 1, si
(1) pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur T ;
(2) pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X ;
(3) pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur T ;
(4) il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x,t) \in X \times T$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_T f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur X et

$$\forall x \in X, g'(x) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Preuve. Soit $a \in X$. On cherche la limite, quand x tend vers a, de $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. On exploite de nouveau la caractérisation séquentielle de la limite. Soit (a_n) une suite de $X \setminus \{a\}$ de limite a. On définit une suite de fonctions (τ_n) par $\tau_n(t) = \dfrac{f(a_n,t) - f(a,t)}{a_n - a}$ pour tout $t \in T$.

Pour tout n, τ_n est continue par morceaux sur T, et comme pour tout t, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable en a, la suite (τ_n) converge simplement vers $\tau : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$. On sait par hypothèse que τ est continue par morceaux sur T.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in T$, $|\tau_n(t)| \leq \varphi(t)$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_T \tau_n(t)dt\right)$ converge vers $\int_T \tau(t)dt$.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite, $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ tend quand x tend vers a vers $\displaystyle\int_T \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)dt$.

Donc g est dérivable en a et $g'(a) = \displaystyle\int_T \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)dt$.

On peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral à la fonction g', ce qui permet de prouver que g' est continue, et donc que g est de classe C^1 sur X.

□

Exemple 7.

Montrer que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ et que pour tout $x > 0$,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Corollaire 8.

Avec les notations précédentes, si

(1) pour tout $t \in T$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ es de classe C^k sur X ;
(2) pour tout $x \in X$, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur T ;
(3) pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur T ;
(4) il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur T telle que pour tout $(x,t) \in X \times T$, $|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_T f(x,t)dt$ est de classe C^k sur X et pour tout $j \leq k$ et tout $x \in X$,

$$g^{(j)}(x) = \int_T \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt.$$

Preuve. Par récurrence sur k, en utilisant le théorème précédent pour l'étape d'hérédité. □

Exemple 9.

(1) Montrer que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

(2) Dresser le tableau de variations de la fonction Γ.

(3) En utilisant la formule de Stirling, montrer que pour tour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^n} = +\infty$.