Intégrales à paramètre

Exercice 1 ⋆⋆

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
2) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
3) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.
4) Donner un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 2 ⋆⋆

On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3 ⋆⋆

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1) Justifier que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) En déduire une expression simple de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 ⋆⋆

Soit

$$F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$$

avec x et y des réels strictement positifs.

1) Montrer que pour tout $y > 0$, $x \mapsto F(x, y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Calculer pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$.
3) En déduire une expression de $F(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Exercice 5 ⋆⋆

Soient, pour tout réel x,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1) Calculer $F(0)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
2) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt.$$

3) Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (G^2)'(x) = -F'(x).$$

4) Calculer $G(0)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ existe et est finie.
5) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 6 ★★

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} dt$. Calculer $f(0)$ en faisant le changement de variables $t = 1/u$ puis étudier les variations de f sur son domaine de définition.

Exercice 7 ★★★

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt.$$

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
2) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.
3) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 ★★★

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2) À l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{t}$, calculer $f(0)$.
3) Montrer que f est continue et décroissante.
4) Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

Exercice 9 ★★★

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$.

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Étudier les variations de f.
3) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4) Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 10 ★★★

Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt$.

1) Montrer que f est définie et positive sur $]-1, +\infty[$.

2) Montrer que f est de classe C^1 et préciser sa monotonie.
3) Trouver une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
4) On pose pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ et en déduire $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5) Déterminer un équivalent de f au voisinage de -1.

Exercice 11 ★★★

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{ch}(2xt)dt.$$

1) Montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire une expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Retrouver l'expression de $F(x)$ à l'aide d'une intégration terme à terme.

Exercice 12 ★★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f.

Exercice 13 ★★★

1) Montrer que pour tout $t \neq 0$, $|\frac{\sin(t)}{t}| \leq 1$.
2) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}e^{-xt}\right| dt$ converge et que sa valeur est inférieure à $\frac{1}{x}$.
3) Montrer que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$.
4) Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
5) Calculer $g(x)$ pour tout $x > 0$.
6) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}e^{-xt}dt$. Montrer que la série de fonctions $\sum(-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
7) Montrer que chacune des fonctions u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
8) En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 14 ★★★

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que pour tout $A > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^A \varphi(t)\cos(xt)dt = 0$.
2) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = 0$.

Exercice 15 ★★★★

Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe, où Γ est la fonction définie par

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$