Intégrales à paramètre

Exercice 1 ★★

On pose pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1]$, $g(x,t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$.

1) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$. De plus, $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{x\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Comme $1-x<1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$, et donc par comparaison de fonctions positives, $f(x)$ existe.

2) • Pour tout $x>0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$;
   • pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • Soit $a<b$ deux réels strictement positifs. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times]0,1]$,

$$|\ g(x,t)| \leq \frac{t^{a-1}}{1+t} \leq t^{a-1}.$$

Comme $t \mapsto t^{a-1}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$, la fonction f est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_*^+$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

3) Soit $x>0$.

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^x}{1+t}dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}.$$

4) Par continuité, $\lim\limits_{x\to 0} f(x+1) = f(1)$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2 ★★

1) Soit $x>0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive. De plus $\frac{e^{-tx}}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par suite, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On pose pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, $g(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x>0, \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2}e^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}e^{-tx}.$$

   On en déduit que pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux.

   Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}^+, |\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)| \leq e^{-at}.$$

   Comme $t \mapsto e^{-at}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f est de classe C^2 sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) L'encadrement $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$ valable pour tout $x>0$ permet d'obtenir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 ★★

1) On pose pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 puisque $\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} x$ donc intégrable sur $]0,1]$, majorée en valeur absolue par $\frac{e^{-t}}{t}$, donc intégrable sur $[1,+\infty[$,
- pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(xt)e^{-t}$ est continue par morceaux.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \le e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) &= \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\big(e^{t(ix-1)}\big) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

3) Ainsi, F est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Comme $F(0) = 0$, $F = \mathrm{Arctan}$.

Exercice 4 ★★

1) Soit $y > 0$. On pose pour tout $x > 0$ et $t > 0$, $f(x,t) = \frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}$.
- Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{t\to 0} f(x,t) = x + y$ donc intégrable sur $]0,1]$, et $f(x,t) = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$ donc intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}.$$

- Pour tout $x > 0$, $t \mapsto -e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \le e^{-at}$.

Comme $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de dérivation sous le signe intégral permet d'affirmer que $x \mapsto F(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = -\frac{1}{x}.$$

3) D'après le calcul précédent,

$$\forall y > 0, \exists C_y \in \mathbb{R}, \forall x > 0, F(x,y) = -\ln(x) + C_y.$$

Soit $y > 0$. On a alors $0 = F(y,y) = -\ln(y) + C_y$.

Donc pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, F(x,y) = \ln(y) - \ln(x)$.

Exercice 5 ★★

1) $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$. Pour tout réel x, $0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dt = e^{-x^2}$ donc par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

2) Soit $a > 0$, $X = [-a, a]$, $T = [0, 1]$ et f la fonction définie sur $X \times T$ par $f(x, t) = \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$.
   - Pour tout $t \in T$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur X
   - pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et dominée par la constante 1 donc intégrable sur T,
   - pour tout $x \in X$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur T,
   - pour tout $(x, t) \in X \times T$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq 2a$ et $\int_T 2adt$ converge.

   Donc F est de classe C^1 sur tout segment $[-a, a]$, donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)}dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2}dt.$$

3) G est une primitive de la fonction continue $t \mapsto e^{-t^2}$ donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(G^2\right)'(x) = 2G(x)G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}dt$. Le changement de variables $t = ux$ pour $x \neq 0$ dans l'intégrale donne alors $\left(G^2\right)'(x) = -F'(x)$ pour $x \neq 0$. Cette égalité est encore vraie pour $x = 0$ puisque dans ce cas, les deux membres de cette égalité sont nuls.

4) $G(0) = 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est impropre en $+\infty$; elle converge car pour tout $t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge. Donc G a une limite finie en $+\infty$.

5) La fonction $F + G^2$ est constante (car de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$), donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) + G(x)^2 = F(0) + G(0)^2 = \frac{\pi}{4}$. En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 6 ★★

1) Comme $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ existe, et donc F est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

2) On remarque que pour tout $x > 0$,
   $$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt.$$
   Or, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ qui s'annule en 1, d'où l'on déduit que F est de classe C^1 et pour tout $x > 0$, $F'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

3) Pour tout $x > 0$,
   $$0 \leq xF(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}$$
   et donc par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

   Pour tout $x \in]0, 1[$,
   $$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \leq e^{-x} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -e^{-x}\ln(x)$$
   donc
   $$0 \leq xF(x) \leq x\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - x\ln(x)e^{-x}$$
   et donc $\lim_{x\to 0} xF(x) = 0$.

4) Pour tout a, A réels strictement positifs,

$$\int_a^A F(x)dx = [xF(x)]_a^A + \int_a^A e^{-x}dx$$

, en faisant tendre a vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} F(x)dx = 1$.

Exercice 7 ★★

On pose pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$f(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+xt}.$$

Pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, et

$$\forall t \geq 0, |f(x,t)| \leq e^{-t}$$

donc F est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $t \geq 0$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^n d'après les théorèmes généraux, et

$$\forall x \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}} t^n e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq n! t^n e^{-t}.$$

On en déduit que F est de classe C^n sur $\mathbb{R}^+$, et

$$F^{(n)}(0) = \int_0^{+\infty} (-1)^n n! t^n e^{-t} dt = (-1)^n (n!)^2.$$

Exercice 8 ★★

On pose pour tout $x > 0$ et $t \geq 0$, $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par morceaux.

Soit $t \geq 0$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2} e^{-xt} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt}.$$

Pour tout $a > 0$, $x > a$ et tout $t \geq 0$,

$$\begin{cases} |f(x,t)| \leq e^{-at} \\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at} \\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq e^{-at} \end{cases}$$

donc F est de classe C^2 sur $]a, +\infty[$ pour tout réel strictement positif a, donc F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$$

donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Exercice 9 ★★

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $f(0)$ existe.

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{udu}{1+u^3} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u+1-1}{(1+u)(1-u+u^2)}du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-u+u^2}du - f(0) \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} - f(0) \\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - f(0) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} \leq \frac{1}{1+t^3}$$

donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

On remarque que f est paire, et pour tout $0 \leq x < y$,

$$\frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} \geq \frac{e^{-ty^2}}{1+t^3}$$

et donc $f(x) \geq f(y)$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 10 ★★★

On pose pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et $f(x,t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$, donc $F(x)$ existe.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ et pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}f(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}}t^n e^{-t}.$$

On en déduit que pour tout $x \geq 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}f(x,t)$ sont continues par morceaux.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2, |\frac{\partial^n f}{\partial x^n}f(x,t)| \leq n!t^n e^{-t}.$$

Comme $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on peut affirmer que F est de classe C^∞ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}} dt.$$

1) De la formule précédente, on déduit $F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$.

Exercice 11 ★★★

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^3+t^3}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{1+x^3+t^3} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ donc cette fonction est intégrable. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2) Comme $u \mapsto \frac{1}{u}$ est un C^1-difféomorphisme entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, on peut réaliser le changement de variables $t = \frac{1}{u}$ et on obtient $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{udu}{1+u^3}$ et donc $f(0) + f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

   Par suite $f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

3) Pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto \frac{1}{1+x^3+t^3}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{1}{1+t^3+x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $|\frac{1}{1+x^3+t^3}| \leq \frac{1}{1+t^3}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $x < y$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+x^3+t^3} \geq \frac{1}{1+y^3+t^3}$, donc par croissance de l'intégrale, $f(y) \geq f(x)$. Donc f est décroissante.

4) Pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^3+t^3} = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$$

   la dernière égalité venant du changement de variables affine $t = xu$. On en déduit par le théorème d'encadrements que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 12 ★★★

On pose, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x,t) = \frac{\cos(t)}{t+x}$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc intégrable sur ce segment, donc $f(x)$ existe. De plus, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue et pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |g(x,t)| \leq \frac{1}{t+a}.$$

   Comme $t \mapsto \frac{1}{t+a}$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, elle est intégrable sur ce segment. D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, la fonction f est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $x \leq y$, alors pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x,t) \geq g(y,t)$, et donc f est décroissante.

3) L'encadrement $0 \leq f(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+t} dt = \ln\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{x}\right)$, valable pour tout $x > 0$, permet de prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. De plus, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t+x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{x}\right)$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

4) Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt$ et donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

En utilisant l'encadrement $1 - \frac{1}{2}t^2 \leq \cos(t) \leq 1$ (inégalité de Taylor-Lagrange), on obtient l'encadrement pour $x > 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t+x} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{t+x}dt \leq f(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t+x}.$$

Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t+x} \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{t+x}dt = O_{x\to 0}(1)$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

1) Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto \sin^{x(t)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin^{x(t)} \underset{t\to 0}{\sim} t^x$. Comme $x > -1$, $t \mapsto t^x$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, et par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \sin^{x(t)}$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $f(x)$ existe et est positif.

2) On note $g(x,t) = (\sin t)^x$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $x > -1$.
   - Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$,
   - pour tout $x > -1$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
   - pour tout $x > -1$, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(\sin(t))(\sin t)^x$, donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
   - Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]-1, +\infty[$,

   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0, \frac{\pi}{2}], |g(x,t)| \leq |\ln(\sin t)(\sin t)^a|.$$

   On pose $\varphi : t \mapsto |\ln(\sin t)(\sin t)^a|$. La fonction φ est continue par morceaux, et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ car $\varphi(t) = o-(t\to 0)\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha = \frac{1-a}{2} < 1$.

   Ainsi f est de classe C^1 sur tout segment de $]-1, +\infty[$ donc f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et $\forall x > -1, f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)(\sin t)^x dt$. Comme pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\ln(\sin t) \leq 0$, $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante.

3) Une intégration par parties donne pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x(1-\cos^2 t)dt \\ &= f(x) - \left[\frac{(\sin t)^{x+1}}{x+1}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{x+1}f(x+2) \end{aligned}$$

   et donc $f(x+2) = \frac{x+1}{x+2}f(x)$.

4) Soit $x > 0$. $\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = (x+1) \times \frac{x+2}{x+1}f(x-1)f(x) = \varphi(x)$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \varphi(1) = f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$.

5) On remarque que $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\varphi(x+1) = \varphi(1)$ car φ est continue en 1. Comme f est continue en 0, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. D'où pour tout $x > -1$, $f(x) = \frac{\varphi(x+1)}{(x+1)f(x+1)} \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on pose $f(x,t) = e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(2xt)$.
   - Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2te^{-t^2}\,\mathrm{sh}(2xt).$$

   - On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ donc intégrable.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\forall x \in [-a,a], \forall t \geq 0, |2te^{-t^2}\ \mathrm{sh}(2xt)| \leq 2a\ \mathrm{sh}(2at)e^{-t^2}.$$

Comme $t \mapsto 2a\ \mathrm{sh}(2at)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de dérivation sous le symbole intégral, F est de classe C^1 sur tout segment $[-a,a]$ inclus dans $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\ \mathrm{sh}(2xt)dt.$$

Une intégration par parties donne alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \left[-e^{-t^2}\ \mathrm{sh}(2xt)\right]_0^{+\infty} + 2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{ch}(2xt)$$

et donc F est solution de l'équation différentielle $y' - 2xy = 0$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$,

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}e^{-t^2}.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n(t)} = \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}e^{-t^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers $t \mapsto f(x,t)$ qui est elle-même continue par morceaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{+\infty} |u_{n(t)}|\ dt = \frac{2^{2n}\ |x|^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt.$$

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$. Une intégration par parties donne $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2}I_n$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} |u_{n(t)}|\ dt = \frac{|x|^{2n}}{n!} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi la série $\sum \int |u_{n(t)}|\ dt$ converge. D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_{n(t)}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}.$$

Exercice 15 ★★★

Comme f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$.

On prolonge g par continuité en posant $g(0) = 0$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \int_0^x f'(u)du = x\int_0^1 f'(tx)dt$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variables affines $u = tx$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$.

De plus, $\int_0^1 f'(0 \times t)dt = f'(0) = g(0)$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 f'(xt)dt.$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, $h(x,t) = f'(xt)$.

- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = t^n f^{(n+1)}(xt).$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur $[-a,a]$, elle y est bornée. D'où
$$\forall x \in [-a,a], \forall t \in [0,1], |t^n f^{(n+1)}(xt)| \leq 1 \times \sup_{[-a,a]} f.$$
Les fonctions constantes sont intégrables sur tout segment.

On en déduit que g est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(0)dt = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Exercice 16 ★★★

1) Soit $t \neq 0$. Si $|t| \geq 1$, alors $|\frac{\sin(t)}{t}| \leq |\sin(t)| \leq 1$. On étudie $h : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur $]0,1]$. Cette fonction est dérivable deux fois et pour tout $t \in]0,1]$, $h'(t) = \frac{1}{t^2}(t\cos(t) - \sin(t))$ et $\frac{d}{dt}(t\cos(t) - \sin(t)) = -t\sin(t)$ d'où le tableau de variations suivant :

t	0	1
$t\cos t - \sin t$	0 ↘	
h	1 ↘	$\sin 1$

On en déduit que la fonction $|h|$ est majorée par 1.

2) On pose pour tout $(x,t) \in (]0,+\infty[)^2$, $f(x,t) = h(t)e^{-xt}$. Pour tous x et t strictement positifs, $|f(x,t)| \leq e^{-xt}$ et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\ dt$ converge et $\int_0^{+\infty} |f(x,t)|\ dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

3) Il s'agit d'une intégration par parties.

4) Soit $a > 0$. On pose $X = [a,+\infty[$ et $T = \mathbb{R}_*^+$.
   - Pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X (car $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur X)
   - pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T, et intégrable sur T d'après la question 2.
   - pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur T,
   - pour tout $(x,t) \in X \times T$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}$ et $\int_T e^{-at}dt$ converge.

On en déduit que g est de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, et donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt = \frac{-1}{1+x^2}$.

5) On en déduit que g est une primitive de $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et donc il existe une constante K telle que pour tout $x > 0$, $g(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + K$. De plus, pour $x > 0$, $|g(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\ dt \leq \frac{1}{x}$ donc g a une limite nulle en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$, on peut conclure : $g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n(x) \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{n\pi}dt \leq \frac{1}{n}$. Le changement de variables $\theta = t - \pi$ donne $u_{n+1}(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(\theta)\frac{|}{\theta+\pi}e^{-x(\theta+\pi)}d\theta \leq u_{n(x)}$.

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n(x)$ converge et son reste $R_{n(x)}$ vérifie

$$|R_{n(x)}| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0, et donc que la série de fonctions $\sum (-1)^n u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

7) Soient $X = \mathbb{R}^+$ et $T = [n\pi, (n+1)\pi]$.
- Pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X,
- pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T,
- pour tout $(x,t) \in X \times T$, $|f(x,t)| \leq 1$ et l'intégrale $\int_T 1dt$ converge car T est un segment.

On en déduit que u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

8) Pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ puisqu'il s'agit d'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues. En particulier g est continue en 0 et donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = g(0) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 17 ★★★

1) Une intégration par parties permet de conclure.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il existe un réel A tel que

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(t)|dt \leq \varepsilon.$$

Soit $\eta > 0$ tel que pour tout $x \geq \eta$, $\left|\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)dt\right| \leq \varepsilon$.

D'où pour tout $x \geq \eta$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt\right| &\leq \left|\int_0^A \varphi(t)\cos(xt)dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt\right| \\ &\leq \varepsilon + \int_A^{+\infty} |\varphi(t)|dt \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = 0$.

Exercice 18 ★★★★

On pose $f = \ln \circ \Gamma$. On sait que f est de classe C^2 et pour tout $x > 0$, $f''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral,

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma''(x)\Gamma(x) &\geq \left(\int_0^{+\infty} \sqrt{t^{x-1}e^{-t}} \times \sqrt{(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}} dt\right)^2 \\ &\geq \left(\int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 \\ &\geq \Gamma'(x)^2.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x > 0$, $f''(x) \geq 0$ et donc f est convexe.