Compacité

Exercice 1 ⋆

Soient K et L deux compacts non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé. On définit la *distance* entre K et L par $d(K,L) = \inf_{x\in K, y\in L} \|x-y\|$. Montrer que $d(K,L) > 0$.

Exercice 2 ⋆⋆

Soient K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $K+L$ est un compact de E.

Exercice 3 ⋆⋆

Soit $f : K \to K$ une fonction continue où K est un compact d'un espace vectoriel normé E telle que

$$\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans K.

Exercice 4 ⋆⋆⋆

Soit a une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 5 ⋆⋆⋆

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1) On suppose dans cette question f continue. Montrer que G est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2) On suppose f bornée et G fermé. Montrer que f est continue.
3) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

Exercice 6 ⋆⋆⋆

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$, et $F = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in K\}$. Montrer que F est une partie fermée de E.

Exercice 7 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1) Soit A une partie non vide de E. Montrer que l'application $x \mapsto \inf_{a\in A} \|x-a\|$ est continue sur E.
2) Soit K un compact non vide de E inclus dans un ouvert U. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in K, B_x(r) \subset U.$$

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient K un compact de E et $f : K \to F$ une application continue injective. On pose $L = f(K)$. Montrer que $f^{-1} : L \to K$ est continue.

Exercice 9 ⋆⋆⋆⋆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Montrer que E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Exercice 10 ⋆⋆⋆⋆

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux, *i.e.* il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PBP^{-1}$ et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $b_{i,i} = b_{i+1,i+1}$. (On pourra commencer par traiter le cas où $n = 2$.)