Compacité

Exercice 1 ⋆

La partie $\{\|x-y\|, x \in K, y \in L\}$ est une partie non vide $\mathbb{R}$ minorée par 0, donc le nombre $d(K, L)$ existe.

La fonction $(x, y) \in K \times L \mapsto \|x - y\|$ est continue sur le compact $K \times L$, donc admet un minimum. On note $k \in K$ et $l \in L$ tel que $\|k - l\| = \min_{\substack{x \in K \\ y \in L}} \|x - y\|$. Si $d(K, L) = 0$, alors $k = l$ et donc $k \in K \cap L = \emptyset$, une contradiction. On en déduit que $d(K, L) > 0$.

Exercice 2 ⋆⋆

Soit u une suite de $K + L$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n \in K$ et $w_n \in L$. Comme K est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(v_{\varphi(n)}\right)$ converge dans K. Comme $\left(w_{\varphi(n)}\right)$ est une suite du compact L, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $w_{\varphi(\psi(n))}$ converge dans L. Comme $\left(v_{\varphi(\psi(n))}\right)$ est une sous-suite de $\left(v_{\varphi(n)}\right)$, elle converge.

Par suite, $u_{\varphi(\psi(n))}$ est une sous-suite de u qui converge dans $K + L$.

Donc $K + L$ est compact.

Exercice 3 ⋆⋆

La fonction $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ est continue sur le compact K et à valeurs réelles, donc admet un minimum $\ell \in K$. Supposons $f(\ell) \neq \ell$. Alors $\|f^2(\ell) - f(\ell)\| < \|f(\ell) - \ell\|$, en contradiction avec le caractère minimal de ℓ. On en déduit que $f(\ell) = \ell$ et donc que f admet au moins un point fixe.

Soit ℓ' un point fixe de f distinct de ℓ. Alors $\|\ell' - \ell\| = \|f(\ell') - f(\ell)\| < \|\ell' - \ell\|$, une contradiction. Donc ℓ est l'unique point fixe de f.

Exercice 4 ⋆⋆⋆

On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a. Montrons que A est convexe.

Soient $(\alpha, \beta) \in A^2$ avec $\alpha < \beta$. Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, $|a_{p+1} - a_p| \leq \varepsilon_n$.

On souhaite prouver que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \exists \varphi(n) \in \mathbb{N}, \begin{cases} \varphi(n) > q \\ a_{\varphi(n)} < \gamma \leq a_{\varphi(n+1)} \end{cases}.$$

En effet dans ce cas, $|a_{\varphi(n)} - \gamma| \leq \frac{1}{n}$ et on aura défini une sous-suite (en choisissant pour tout n, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$) de a de limite γ.

Supposons que ce ne soit pas le cas :

$$\exists q \in \mathbb{N}, \forall k > q, \gamma \notin [a_k, a_{k+1}].$$

Soit $q \in \mathbb{N}$ un tel entier.

Puisque α est une valeur d'adhérence de a, il existe un entier $p > \max(N, q)$ tel que $a_p < \gamma$. De même, β étant une valeur d'adhérence de a, il existe un entier $r > \max(N, q)$ tel que $a_r > \gamma$. L'ensemble $\{k \in [\![p, r]\!] \mid a_k < \gamma\}$ est non vide ($p \in E$) et majoré (par r), donc a un plus grand élément k qui vérifie $a_k < \gamma$ (car $k \in E$) et $a_{k+1} \geq \gamma$ (car $k+1 \notin E$ et $k+1 \leq r$), une contradiction puisque $k \geq p > q$.

Exercice 5 ★★★

1) Soit $((x_n, y_n))_n$ une suite de vecteurs de G. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$. On suppose que cette suite de vecteurs converge vers un vecteur (x, y). Donc $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Comme f est continue, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n = f(x)$. Ainsi $(x, y) \in G$. Donc G est fermé.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite de limite a, et montrons que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. La suite $(f(x_n))_n$ est bornée puisque f est bornée. Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(f\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ converge. Notons b la limite de cette sous-suite. Ainsi la suite $\left(\left(x_{\varphi(n)}, f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)\right)_n$ converge vers (a, b). Comme G est fermé, $(a, b) \in G$ et donc $b = f(a)$. Ce raisonnement permet aussi d'affirmer que b est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_n$. On en déduit que la suite $(f(x_n))$ converge vers b (exercice classique).

D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, f est continue.

1) Voici un contre-exemple : $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0. \end{cases}$

Exercice 6 ★★★

Soit $(u_n)_n$ une suite de vecteurs de F convergente. On note u sa limite. Par définition de F, pour tout entier n, il existe $(\lambda_n, x_n) \in \mathbb{R}^+ \times K$ tel que $u_n = \lambda_n x_n$. Comme K est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ converge. On note x sa limite. C'est un vecteur de K puisque K est fermé.

Puisque K est compact, K est borné : soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $\|x\| \leq M$.

Comme K ne contient pas 0, et comme $E \setminus K$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_0(r) \subset E \setminus K$. On en déduit que

$$\forall x \in K, \|x\| \geq r.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_n| = \frac{\|\lambda_n x_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{M}{r}.$$

La suite de réels (λ_n) est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\left(\lambda_{\varphi(\psi(n))}\right)_n)$ converge. On note λ sa limite. Comme $\mathbb{R}^+$ est fermé, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

La suite $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_n$ étant extraite de la suite $(u_n)_n$, elle converge vers u. Par unicité de la limite, $u = \lambda x \in F$. Donc F est fermé.

Exercice 7 ★★★

1) On note f cette application. Elle est bien définie sur E car pour tout $x \in E$, $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée (par 0).

   Montrons que f est 1-lipschitzienne. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\forall a \in A, f(x) \leq \|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

donc

$$\forall a \in A, f(x) - \|x - y\| \leq \|y - a\|.$$

Ainsi $f(x) - \|x - y\|$ minore $\{\|y - a\| \mid a \in A\}$. Or $f(y)$ est le plus grand minorant de cette partie, donc $f(x) - \|x - y\| \leq f(y)$ et donc $f(x) - f(y) \leq \|x - y\|$.

En inversant les rôles de x et y, on obtient $f(y) - f(x) \leq \|y - x\| = \|x - y\|$.

Ainsi f est 1-lipschitzienne, donc continue.

1) On note A le complémentaire de U dans E. D'après la question précédente, f est continue sur le compact K, donc admet un maximum noté r. Ainsi,

$$\forall x \in K, \forall a \in A, \|x - a\| \geq f(x) \geq r.$$

Soit $x \in K$ et $y \in B_x(r)$. Si $y \notin U$, alors $y \in A$ et donc $\|x - y\| \geq r$, une contradiction. Donc $y \in U$.

Exercice 8 ★★★

On suppose f^{-1} non continue :

$$\exists x \in L, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists y \in L, \|x - y\| < \eta \text{ et } \left\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right\| > \varepsilon.$$

On pose $u = f^{-1}(x)$, et pour tout entier naturel n, $\eta_n = 2^{-n}$. Il existe donc $y_n \in L$ tel que $\|x - y_n\| < 2^{-n}$ et $\left\|u - f^{-1}(y_n)\right\| > \varepsilon$. On pose $v_n = f^{-1}(y_n)$.

Comme K est compact, on peut extraire de (v_n) une suite $\left(v_{\varphi(n)}\right)$ convergente. On note v sa limite. Comme f est continue, $f(v) = \lim_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)}$. Or la suite (y_n) converge vers x, donc $x = f(v)$. On en déduit que $u = v$, en contradiction avec $\left\|u - v_{\varphi(n)}\right\| > \varepsilon$.

Exercice 9 ★★★★

On suppose dans un premier temps E de dimension finie. On sait alors que toute partie fermée bornée est compacte, ce qui est le cas de la boule unité fermée.

On suppose à présent que la boule unité fermée est compacte et E de dimension infinie. On forme alors une suite de vecteurs (u_n) telle que
- $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, d(u_{n+1}, \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)) = 1$.

En effet, il suffit de choisir pour u_0 n'importe quel vecteur de norme 1, et si $u_0, ..., u_n$ ont déjà été construits, on choisit $x \in E \setminus \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)$ (ce qui est possible car E est de dimension infinie), un tel vecteur vérifie donc $d(x, \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)) > 0$ et on pose $u_{n+1} = \frac{x-y}{\delta}$ où $\delta = d(x, \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n))$ et $y \in \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)$ un vecteur tel que $d = \|x - y\|$:
- le vecteur y existe : il existe une suite $\left(y_p\right)$ de $\mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)$ tel que $d = \lim\left\|x - y_p\right\|$; cette suite est bornée dans le fermé $\mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)$ donc elle admet une sous-suite convergente, la limite d'une telle sous-suite fournit le vecteur y,
- $d(u_{n+1}, \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)) = d\left(\frac{x}{\delta}, \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)\right)$car $\frac{y}{\delta} \in \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)$, et $d\left(\frac{x}{\delta}, \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)\right) = \frac{1}{\delta} d(x, \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_n)) = 1$.

Comme la boule unité fermée est supposée compacte, on peut extraire de u une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ convergente. Donc $\left(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right)$ est de limite nulle, or, φ étant strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geq d\left(u_{\varphi(n+1)}, \mathrm{Vect}\left(u_0, ..., u_{\varphi(n+1)-1}\right)\right) = 1$, une contradiction.

Exercice 10 ★★★★

- Comme indiqué dans l'énoncé, commençons par traiter le cas où $n = 2$. Soit donc $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)a + \sin(\theta)b & \cos(\theta)c + \sin(\theta)d \\ -\sin(\theta)a + \cos(\theta)b & -\sin(\theta)c + \cos(\theta)d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\cos^2(\theta) + (b+c)\sin(\theta)\cos(\theta) + d\sin^2(\theta) & * \\ * & d\cos^2(\theta) - (b+c)\cos(\theta)\sin(\theta) + a\sin^2(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ de sorte que $(a-d)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2(b+c)\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$, *i.e.* $(a-d)\cos(2\theta) + (b+c)\sin(2\theta) = 0$: cela revient à trouver un vecteur unitaire orthogonal (dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle) à $(a-d, b+c)$, ce qui est bien sûr possible.

- On se place dans le cas général. Soit $f : P \in O_n(\mathbb{R}) \to \delta(P^{-1}AP)$ où $\delta : (m_{i,j}) \in M_2(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} |m_{i+1,i+1} - m_{i,i}|$. La fonction f est continue sur le compact $O_n(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Elle admet donc un minimum $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\varphi(P) = 0$. On suppose pour cela $\varphi(P) > 0$: soit alors $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $b_{k+1,k+1} \neq b_{k,k}$ où $B = P^{-1}AP$. On note $C = \begin{pmatrix} b_{k,k} & b_{k,k+1} \\ b_{k+1,k} & b_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$. D'après la première partie, il existe $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}CQ$ ait des coefficients diagonaux égaux. On pose R la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$. On remarque que $R \in O_n(\mathbb{R})$ et $\delta(R^{-1}BR) < \delta(B)$ et donc, comme $PR \in O_n(\mathbb{R})$, $\varphi(PR) < \varphi(P)$: une contradiction.