

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 20

Calcul différentiel

26 FÉVRIER 2025

Exercice 1. Les fonctions suivantes définies par

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + 2y^2}, \quad g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) = \frac{x^3 + y^4}{|x| + y^2}$$

pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et par $f(0, 0) = g(0, 0) = h(0, 0) = 0$ sont-elles continues en $(0, 0)$?

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2}$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

— En chaque point $(x, y) \neq (0, 0)$, les deux dérivées partielles

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{-2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{4y^3x^2 + 2y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

existent (car f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) et sont continues (car les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont des quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas).

— En $(0, 0)$, la dérivée partielle $\partial_1 f$ existe et vaut 0 car

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Et la fonction $\partial_1 f$ est continue en $(0, 0)$ car $\partial_1 f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \partial_1 f(0, 0)$. En effet :

$$0 \leq |\partial_1 f(x, y)| \leq \frac{2|x| \cdot |y|^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2 \frac{\|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} \leq 2\|(x, y)\|$$

car $|x| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$ et $|y| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$. D'où $\partial_1 f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

— De même, $\partial_2 f(0, 0)$ existe et vaut 0 car

$$\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{k^2 - 0}{k} = k \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

Et la fonction $\partial_2 f$ est continue en $(0, 0)$ car $\partial_2 f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \partial_2 f(0, 0)$. En effet

$$0 \leq |\partial_2 f(x, y)| \leq \frac{4|y|^3|x|^2 + 2|y|^5}{(x^2 + y^2)^2} \leq 6\|(x, y)\|$$

Donc la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3. Soit $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que la fonction f est continue en $(0, 0)$, que $\partial_1 f(0, 0)$ existe mais que $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

$|\sin(u)| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, d'où $|f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{|x| + |y|}$. Or $|xy| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \leq \|(x, y)\|^2$. Et $(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|xy| \geq x^2 + y^2$, d'où $|x| + |y| \geq \|(x, y)\|$. Donc

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\|} \leq \|(x, y)\| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

D'où (gendarmes) : $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$. Or $f(0, 0) = 0$ par définition. Donc f est continue en $(0, 0)$.

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\frac{\sin(h \cdot 0)}{|h| + 0} - 0}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ donc } \partial_1 f(0, 0) \text{ existe et } \partial_1 f(0, 0) = 0.$$

Soient $x > 0$ et $y > 0$: alors $|x| = x$, $|y| = y$, d'où $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x + y}$ et $\partial_1 f(x, y) = \frac{y \cos(xy)(x + y) - \sin(xy)}{(x + y)^2}$.

En particulier, $\partial_1 f(x, x) = \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{(2x)^2} = \frac{2x^2(1 + \varepsilon(x)) - (x^2 + x^2\varepsilon(x))}{(2x)^2} = \frac{x^2 + x^2\varepsilon(x)}{4x^2} = \frac{1}{4} + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{4} \neq \partial_1 f(0, 0)$. D'où la fonction $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 4 (Dériver suivant un vecteur). Soient un ouvert U de \mathbb{R}^2 , un point $a = (a_1, a_2) \in U$ et un vecteur $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable en le point a suivant le vecteur v** si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe et est finie. On note alors $D_v f(a)$ cette limite et on l'appelle la dérivée de f en a suivant v .

1. Montrer que : si f est dérivable en a suivant tout vecteur v , alors f admet des dérivées partielles en a .

2. Soit $g(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$.

(a) Montrer que la fonction g n'est pas continue en $(0, 0)$.

(b) Montrer que g est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur (x, y) .

3. Montrer que : si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors f est dérivable en tout point $a \in U$ suivant tout vecteur v et exprimer $D_v f(a)$ à l'aide des dérivées partielles de f en a .

La réciproque est-elle vraie ?

1. La fonction f est dérivable en a suivant chaque vecteur de la base (e_1, e_2) . D'où $\frac{f(a + te_1) - f(a)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} D_{e_1} f(a)$. Or

$\frac{f(a + te_1) - f(a)}{t} = \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$, qui a donc une limite finie, égale à $D_{e_1} f(a)$. Donc $\partial_1 f(a)$ existe et est égal à $D_{e_1} f(a)$. De même, $\partial_2 f(a)$ existe et est égal à $D_{e_2} f(a)$.

2. (a) La fonction g n'est pas continue en $(0, 0)$ car $(x, x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (0, 0)$ mais $g(x, x^2) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $g(0, 0) = 0$.

(b) Soient $a = (0, 0)$ et $v = (x, y) \neq (0, 0)$. Alors $\frac{g(a + tv) - g(a)}{t} = \frac{g(tx, ty)}{t} = \frac{t^3 x^2 y}{t^4 x^4 + t^2 y^2}$, d'où :

— (premier cas) si $y \neq 0$, alors $\frac{g(tx, ty)}{t} = \frac{x^2 y}{t^2 x^4 + y^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{x^2}{y}$;

— (second cas) si $y = 0$, alors $\frac{g(tx, ty)}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Donc g est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur et $D_{(x, y)} g(0, 0)$ est égal à $\frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$ et est égal à 0 si $y = 0$.

3. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Si la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 , alors $f(a + tv) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = f(a_1, a_2) + tv_1 \partial_1 f(a_1, a_2) + tv_2 \partial_2 f(a_1, a_2) + \|tv\| \varepsilon(tv)$ d'après la formule de Taylor & Young. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$: $\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = v_1 \partial_1 f(a) + v_2 \partial_2 f(a) + \|v\| \varepsilon(tv) \xrightarrow{t \rightarrow 0} v_1 \partial_1 f(a) + v_2 \partial_2 f(a)$. Donc f est dérivable en a suivant v et $D_v f(a) = v_1 \partial_1 f(a) + v_2 \partial_2 f(a)$.

La réciproque est fautive : la question précédente exhibe un contre-exemple. En effet, elle est dérivable en $(0, 0)$ suivant tout vecteur. Et aussi en tout autre point (x, y) car elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mais elle n'est pas continue en $(0, 0)$, donc a fortiori pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 \triangleright [corollaire 14 du chapitre XX](#).

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \varphi(x^2 + y^2)$.

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

2. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \varphi(\frac{y}{x})$.

Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 et calculer $x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y}$. Interpréter géométriquement le résultat.

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \varphi(x^2 + y^2)$.

φ est dérivable, d'où : $\partial_1 f(x, y) = 2x\varphi'(x^2 + y^2)$ et $\partial_2 f(x, y) = 2y\varphi'(x^2 + y^2)$. Or φ' est continue, d'où $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues (car ce sont des produits et composées de fonctions continues). Donc f est de classe \mathcal{C}^1 .

De plus $x \cdot \partial_2 f(x, y) - y \cdot \partial_1 f(x, y) = x \cdot 2y\varphi'(x^2 + y^2) - y \cdot 2x\varphi'(x^2 + y^2) = 0$.

Or $x \cdot \partial_2 f(x, y) - y \cdot \partial_1 f(x, y) = \begin{vmatrix} x & \partial_1 f(x, y) \\ y & \partial_2 f(x, y) \end{vmatrix} = \det(\vec{x}, \nabla f(\vec{x}))$. D'où le vecteur $\vec{x} = (x, y)$ et le gradient $\nabla f(\vec{x})$ sont colinéaires. Pourquoi? Car le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \text{cte}$ est une courbe de niveau de la fonction f et le gradient est orthogonal à cette courbe de niveau.

2. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \varphi(\frac{y}{x})$.

La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 car $\partial_1 g(x, y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'(\frac{y}{x})$ et $\partial_2 g(x, y) = \frac{1}{x}\varphi'(\frac{y}{x})$ et φ' est continue. De plus $x \cdot \partial_1 g(x, y) + y \cdot \partial_2 g(x, y) = 0$. Or $x \cdot \partial_1 g(x, y) + y \cdot \partial_2 g(x, y)$ est égal au produit scalaire $\langle \vec{x}, \nabla g(\vec{x}) \rangle$. D'où le vecteur $\vec{x} = (x, y)$ et le gradient $\nabla g(\vec{x})$ sont orthogonaux. Pourquoi? Car la droite (privée de l'origine) d'équation $\frac{y}{x} = \text{cte}$ est une courbe de niveau de la fonction g et le gradient est orthogonal à cette courbe de niveau.

Exercice 6. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \mapsto f(x)$ est **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Montrer que, si f est de classe \mathcal{C}^1 et homogène de degré α , alors

1. les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont homogènes de degré $\alpha - 1$;

2. pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \partial_1 f(x) + x_2 \partial_2 f(x) = \alpha f(x)$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Les deux fonctions définies par $g(x) = f(tx)$ et $h(x) = t^\alpha f(x)$ sont égales et de classe \mathcal{C}^1 . Leurs dérivées partielles :

$$\partial_i g(x) = t \partial_i f(tx) \quad \text{et} \quad \partial_i h(x) = t^\alpha \partial_i f(x)$$

sont égales pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, d'où (en divisant par t) :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_i f(tx) = t^{\alpha-1} \partial_i f(x).$$

Chaque dérivée partielle est donc homogène de degré $\alpha - 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Les deux fonctions définies par $G(t) = f(tx)$ et $H(t) = t^\alpha f(x)$ sont égales et dérivables. Leurs dérivées

$$G'(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{d(tx_i)}{dt} \partial_i f(tx) = \sum_{i=1}^2 x_i \partial_i f(tx) \quad \text{et} \quad H'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

sont égales pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, donc en particulier pour $t = 1$:

$$\sum_{i=1}^2 x_i \partial_i f(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 7 (Une équation aux dérivées partielles). En passant en coordonnées polaires, déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vers \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 telles que :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Soit, pour tout $r > 0$ et tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ car c'est la composée $f \circ M$ de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 : la fonction f et la fonction $M : (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. De plus,

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin(\varphi) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\varphi) \frac{\partial f}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}$$

grâce à la règle de la chaîne.

$$\text{D'où } x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \iff F(r, \varphi) = k(r), \text{ où } k \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Exercice 8. 1. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

En chaque point critique, préciser s'il y a un extremum local, si c'est un minimum ou un maximum et s'il est global.

2. Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x, y) = x \ln^2 x + xy^2.$$

Étudier les points critiques de la fonction f , ses extrema locaux et ses extrema globaux.

Exercice 9. Déterminer tous les extrema locaux de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(xy).$$

Pour chacun d'entre eux, préciser si c'est un minimum ou un maximum et s'il est global.

ANALYSE : \mathbb{R}^2 est un ouvert et la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 , d'où, s'il y a un extremum local en point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors (x, y) est un point critique de f :

$$\nabla f(x, y)(0, 0) \iff \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = y \cos(xy) = 0 \\ \text{et} \\ \partial_2 f(x, y) = x \cos(xy) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(xy) = 0 \\ \text{ou} \\ x = y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z}, xy = \frac{\pi}{2} + p\pi \\ \text{ou} \\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Les points critiques de f sont donc :

- l'origine $(0, 0)$;
- les points de la réunion $\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} H_p$ des hyperboles H_p d'équation $xy = \frac{\pi}{2} + p\pi$.

SYNTHÈSE : $f(0, 0) = 0$ et, au voisinage de $(0, 0)$: $f(0 + h, 0 + k) = \sin(hk)$ est strictement positif si $hk > 0$ ou strictement négatif si $hk < 0$. Il n'y a donc pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Sur chaque hyperbole H_p , $f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = (-1)^p$:

- si p est pair, alors $f(x, y) = 1$ qui est un maximum global car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(xy) \leq 1$;
- si p est impair, alors $f(x, y) = -1$ qui est un minimum global car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(xy) \geq -1$.

Exercice 10. On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , vérifiant l'équation suivante :

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y) \quad (\star)$$

1. Démontrer que, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie (\star) , alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles précédente et en déduire l'ensemble des solutions de (\star) .

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto M(t) = (x+t, y+t)$ est de classe C^1 . La fonction $f \circ M$ est donc aussi C^1 par composition de fonctions C^1 . Or cette fonction $f \circ M$ est constante d'après (\star) , donc sa dérivée en 0 est nulle :

$$0 = (f \circ M)'(t) = \frac{d(x+t)}{dt}(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{d(y+t)}{dt}(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la règle de la chaîne. En particulier, si $t = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2. On effectue le changement de coordonnées $(u, v) = (x+y, x-y)$ équivalent à $(x, y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$. On pose $F(u, v) = f(x, y)$. La fonction F est C^1 car c'est la composée de deux fonctions C^1 . On calcule les dérivées partielles de f en fonction de celles de F grâce à la règle de la chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \end{cases} .$$

On résout l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 &\iff \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \\ &\iff \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, F(u, v) = C(v), \text{ où } C \text{ est de classe } C^1 \\ &\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = C(x-y) \end{aligned}$$

Si une fonction f vérifie (\star) , alors elle est une solution de l'EDP, d'où $f(x, y) = C(x-y)$. Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie (\star) car

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^3, f(x+t, y+t) = C(x+t - (y+t)) = C(x-y) = f(x, y).$$