# Colle 17 Espaces vectoriels normés

MAZURS Tomass

**<u>Exercice 1.</u>** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Soit $F$ un espace vectoriel normé et $A$ une partie de $F$. Quand dit-on que $A$ est un ouvert de $F$ ? Quand dit-on que $A$ est un fermé de $F$ ? $\mathbb{Q}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$ ? un fermé ?
2. Démontrer que l'ensemble $H$ des matrices diagonalisables de $E$ est dense dans $E$. Ce résultat est-il encore valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ? (On pourra, pour cette dernière question, traiter le cas où $n = 2$).
3. Démontrer que $H$ n'est pas un ouvert de $E$ et que son intérieur est l'ensemble $H'$ des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont distinctes, en admettant que $H'$ est un ouvert de $E$.
4. Montrer que $H'$ est un ouvert de $E$.

*Solution* **1.**

1. *Cours...*
2. *Soit $T$ une matrice triangulaire supérieure appartenant à $E$ ; et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $D_p = \mathrm{Diag}\,(1/p, \cdots, n/p)$. Si on note $t_1, \cdots, t_n$ les éléments de la diagonale de $T$ et $t'_1, \cdots, t'_n$ ceux de $D_p + T$, on a alors, pour tout couple $(i, j)$,*
   - *si $i = j$ alors $|t'_i - t'_j| = \frac{1}{p}(i-j) \neq 0$*
   - *si $i \neq j$ alors*
     *$|t'_i - t'_j| = |t_i - t_j - \frac{1}{p}(i-j)| \geq \underbrace{|t_i - t_j|}_{\neq 0} - \frac{1}{p}\underbrace{|i-j|}_{\neq 0} \neq 0$ pour $p$ assez grand. La matrice triangulaire $D_p + T$ est donc bien diagonalisable pour $p$ assez grand.*

   *Soit $M \in E$, on sait que $M$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T$ ; on écrit donc $M = P_0^{-1} T P_0$ et on pose*
   *$\forall p \geq K$, $N_p = P_0^{-1}(D_p + T)P_0$. $N_p$ est diagonalisable et, en prenant, par exemple, la norme définie par $\|M\| = \max m_{ij}$, on a :*
   *$\|M - N_p\| = \|P_0^{-1} D_p P_0\| \leq \|P_0\|^2 \|D_p\|$ c'est à dire $\|M - N_p\| \leq \frac{\|P_0\|^2}{p}$ ce qui prouve que $\lim_{p \to +\infty} N_p = M$. D'où la densité des matrices diagonalisables. Celà ne marche plus dans $\mathbb{R}$ car si on prend la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, elle n'est pas diagonalisable et s'il existait une suite $(M_p)$ de matrices diagonalisables qui convergeait vers $A$, le discriminant du polynôme caractéristique (degré 2 !) de chaque $M_p$ est positif ou nul car $M_p$ étant diagonalisable, elle a au moins une valeur propre la suite de ces discriminants devrait, par continuité, converger vers -4 ; cela fournit une contradiction lorsque $n = 2$.*
3. *On va montrer que son complémentaire n'est pas un fermé en prenant une suite de matrices nilpotentes non nulles (donc non diagonalisables) qui converge vers une matrice diagonalisable. Si $n = 2$, il suffit de prendre la suite de matrices $(M_p) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui converge vers la matrice nulle qui est diagonalisable. Pour $n \geq 3$, on prend la suite de matrices $(M_p)$ dont tous les termes sont nuls sauf celui de la première ligne et deuxième colonne qui vaut $\frac{1}{p}$.*

   *On prouve maintenant que $\mathring{H}$ est l'ensemble $H'$ des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont distinctes.*

   *Soit $M$ une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres égales. Alors $M$ n'est pas dans l'intérieur de $H$ car on peut trouver une suite de matrice $(M_p)$ qui converge vers $M$ et qui ne sont pas diagonalisables. En effet :*

   *Soit $P$ une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$ où $D$ est diagonale,*

   $$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ posons } D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   *Alors la suite $(M_p)$ définie par $M_p = PD_pP^{-1}$ converge vers $M$ et chaque $M_p$ n'est pas diagonalisable. Sinon, $D_p$ serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. On a donc prouvé que $\mathring{H} \subset H' \subset H$ et, puisqu'on admet que $H'$ est un ouvert, on en déduit que $\mathring{H} = H'$.*
4. *Soit $M \in H'$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(M_k)$ de matrices à spectres non simples convergeant vers $M$.*

   *Pour tout $k$, on se donne $a_k$ une racine commune de $\chi_{M_k}$ et $\chi'_{M_k}$. Le tout est de voir que $(a_k)$ est bornée, car si c'est le cas, en extrayant, on obtiendra par passage à la limite une racine commune à $\chi_M$ et $\chi'_M$, d'où $M \notin H'$, et une contradiction. (au passage on utilise la continuité de $\chi_A$ vis-à-vis de $A$, et la continuité de $P \mapsto P'$)*

   *$(\chi_{M_k})$ converge vers $\chi_M$, donc les coefficients des $\chi_{M_k}$ sont bornés par une constante $C$.*

   *En utilisant le caractère unitaire, on a $|\chi_{M_k}(x)| \geq f(|x|) = |x|^n - C|x|^{n-1} - \dots - C \to_{|x| \to +\infty} +\infty$, d'où le résultat.*

# NOEL François

**Exercice 2.** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$

1. Si $N$ est une norme sur $E$, montrer que $F$ est soit un fermé, soit dense dans $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de norme sur $E$ telle que $F$ soit un fermé et une norme telle que $F$ soit dense.

**Exercice 3.** Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On note $S = \{u \in \mathcal{L}(E),\, u^2 = Id_E\}$.

1. Montrer que $id_E$ est un point isolé de $S$.
2. Déterminer tous les points isolés.
3. L'ensemble $S$ est-il fermé ? borné ?

*Solution* **2.**

1. *On suppose que $F$ n'est pas fermé : il existe $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n = g \notin F$. Soit $h \in E$, alors*
$$h_n = \frac{h(0)}{g(0)} f_n + \left(h - \frac{h(0)}{g(0)} g\right)$$
*est une suite de $F$ qui converge vers $h$, donc $F$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

2. *On pose $f_n$ affine entre entre $[0, \frac{1}{n}]$, $f_n(0) = 0$ et $f(\frac{1}{n}) = 1$ et constante égale à 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$. Cette fonction converge pour la norme 1 vers la fonction constante 1 ! et $F$ n'est pas une partie fermée. Pour la norme sup, $F$ est clairement une partie fermée fermé : si $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers $f$ pour la norme sup, alors $(f_n)$ converge simplement vers $f$ ; en particulier $(f_n(0))$ converge vers 0. Donc $f(0) = 0$ et $f \in F$.*

*Solution* **3.**

1. *Soit $(u_n)$ une suite d'éléments de $S$ convergeant vers $Id_E$. Comme $u_n$ est une symétrie, $u_n = id_E$ ssi $tru_n = n$. La fonction trace étant continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc est constante à partir d'un certain rang. On en déduit que $Id_E$ est un point isolé.*

2. *Le même raisonnement montre que $-Id_E$ est un point isolé. Soit $u \in S$, $u \neq \pm Id_E$. Soit $e_1$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et $e_2$ associé à la valeur propre $-1$ que l'on complète une base de vecteurs de $u$ dans $E_1(u)$ puis dans $E_{-1}(u)$. Relativement à cette base, la matrice de $u$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & I_r & \\ & & & -I_{n-r-2} \end{pmatrix}$. On pose $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ -\alpha & -1 & & \\ & & I_r & \\ & & & -I_{n-r-2} \end{pmatrix}$. La suite tend vers $u$ et $u$ n'est pas un point isolé.*

3. *$S$ est fermée comme l'image réciproque de $\{0\}$ par $u \mapsto u^2 - id_E$. Mais n'est pas bornée comme le montre l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ \alpha & -1 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$ en faisant tendre $\alpha$ vers $+\infty$. On aurait pu se limiter aux symétries orthogonales.*

# REMAUD Clément

**Exercice 4.** Soit $E = C^1([0,1),\mathbb{R})$.

1. Montrer que sur $E$, les applications $N_1 : f \to |f(0)| + \sup\limits_{[0,1]}|f + 2f'|$ et $N_2 : f \to \sup\limits_{[0,1]}|f| + \sup\limits_{[0,1]}|f'|$ sont deux normes équivalentes.
2. Sont-elles équivalentes à la norme de la convergence uniforme ?

**Exercice 5.** Soit $E$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente.
Pour tout $a \in E$, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Établir que $(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé.
2. On note

$$F = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}.$$

   L'ensemble $F$ est-il
   (a) une partie convexe ?
   (b) ouvert dans $(E, \|\ \|)$ ?
   (c) fermé dans $(E, \|\ \|)$ ?
   (d) borné dans $(E, \|\ \|)$ ?

*Solution* **4.** Il est clair que ce sont des normes et que $N_1 \leqslant 2N_2$

1. *Montrons l'autre inégalité. Posons $g = f + 2f'$. Donc $\left(2f\, e^{t/2}\right)' = g(t)\, e^{t/2}$, ou encore*
$$f(t) = \frac{1}{2} \times e^{-t/2} \times \int_0^t g(x)e^{x/2}\, dx + f(0)$$
*On en déduit que*
$$\sup_{[0,1]}|f| \leq \sup_{[0,1]}|g| \times \sup_{[0,1]}\left[e^{-t/2} \times \int_0^t \frac{1}{2}e^{x/2}\, dx\right] + |f(0)| \leq N_1(f).$$
*Par ailleurs, $f' = \frac{1}{2}(g-f)$, donc $\sup_{[0,1]}|f'| \leq \frac{1}{2}\left(\sup_{[0,1]}|g| + \sup_{[0,1]}|f|\right) \leq N_1(f)$ Ainsi $N_2(f) \leqslant 2N_1(f)$ et les deux normes sot équivalentes.*
2. *Elles ne sont pas équivalentes à $N_\infty$ car, si on prend $f_n : x \to exp(nx)$, alors $N_2(f_n) = (n+1)exp(n)$ alors que $N_\infty(f_n) = exp(n)$. Donc, $\lim_{+\infty}(N_2(f_n)/N\infty(f_n)) = +\infty$.*

*Solution* **5.**

1. *Ne pas oublier $E$ espace vectoriel : soit $a$ et $b \in E$ et $\lambda$, $\mu \in \mathbb{C}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda a_n + \mu b_n| \leq |\lambda|\,|a_n| + |\mu|\,|b_n|$. On en déduit que $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ est absolument convergente et $(\lambda + \mu b \in E$.*
2. (a) *Pour tout $t \in [\![0,1]\!]$, $\sum ta_n + (1-t)b_n = t\sum a_n + (1-t)\sum b_n = t + (1-t) = 1$, donc $ta + (1-t)b \in F$.*

   (b) *Pour tout $\varepsilon > 0$, $u_0 = a_0 + \varepsilon$ et pour $n > 0$, $u_n = a_n$ vérifie $\|u - a\| = \varepsilon$ et $u \notin F$ si $a \in F$. Donc, pour tout $a \in F$, il n'esxiste pas de boule ouverte centrée en $a$ inclue dans $F$ : $F$ n'est pas un ouvert.*

   (c) *Trois méthodes*

   i. *Par la caractérisation des suites : Soit $(a^k)_{k\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $a \in E$ pour la norme $\|\ \|_1$, alors $\|a^k - a\|_1 = \sum_n |a_n^k - a_n|$ tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$. Comme $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k\right| \leq \sum_n |a_n^k - a_n| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = 1$ pour tout $k$, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ et $a \in F$. $F$ est donc un fermé.*

   ii. *Montrons que $F^c$ est un ouvert : Supposns $a \in F^c$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l \neq 1$. On montrer que si on pose $\varepsilon = \frac{|1-l|}{2}$, alors $\mathcal{B}(a,\varepsilon) \subset F$ : soit $b \in \mathcal{B}(a,\varepsilon)$, on sépare deux cas :*

   A. *si $l > 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - b_n| > l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1$ et $b \in F^c$.*

   B. *si $l < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - b_n| < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < 1$ et $b \in F^c$.*

   *Dans les deux cas $\mathcal{B}(a,\varepsilon) \subset F^c$.*

   iii. *Méthode plus rapide que l'on montrera bientôt : L'application $a \mapsto \sum a_n$ est linéaire, 1-lipschitzienne, donc continue et l'image réciproque du fermé $\{1\}$ est un fermé.*

   (d) *Pour tout $K \in \mathbb{R}_+$, on pose $a_0 = K$, $a_1 = 1 - K$ et $a_n = 0$ si $n \geq 2$. Alors $a \in F$ et $\|a\| = K$, donc $F$ n'est pas bornée.*