

Corrigé de la colle n°17

Merci à
Arthur.

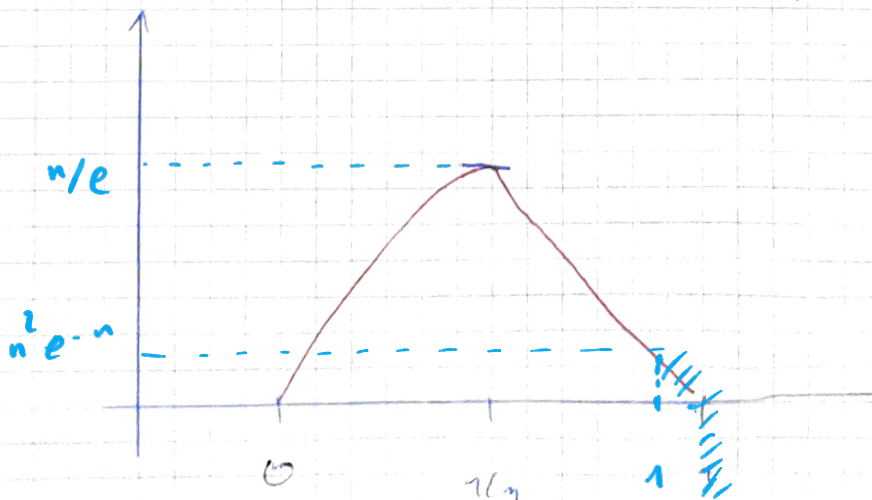
Exercice 1

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. la fonction h_n est dérivable et
 $\forall x \in [0, 1], h'_n(x) = n^2 e^{-nx} (1 - nx)$
 Soit $x \in [0, 1], h'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - nx \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq x$

D'où le tableau de variations

x	0	$\frac{1}{n}$	1
h'_n	-	0	+
h_n		$\nearrow \frac{n}{e}$	

x	0	$\frac{1}{n}$	1
h'_n		+	0
h_n	0	$\nearrow \frac{n}{e}$	$\searrow n^2 e^{-n}$



2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\|h_n\|_1 &= \int_0^1 |h_n(t)| dt \\ &= n^2 \int_0^1 t e^{-nt} dt\end{aligned}$$

les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\frac{1}{n} e^{-nt}$ sont C^1 sur $[0,1]$
Donc par intégrations par parties

$$\begin{aligned}\|h_n\|_1 &= n^2 \left[\left[t \left(-\frac{1}{n} e^{-nt} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n} e^{-nt} dt \right] \\ &= n^2 \left[-\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^{-nt} \right]_0^1 \right] \\ &= n^2 \left[-\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} (e^{-n} - 1) \right) \right]\end{aligned}$$

$$\|h_n\|_1 = 1 - e^{-n} - n e^{-n}$$

et $\|h_n\|_\infty = h_n\left(\frac{1}{n}\right)$ d'après 1)

$$\|h_n\|_\infty = \frac{n}{e}$$

3)

$$\|h_n\|_\infty = \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc

la suite h_n n'est pas bornée pour la norme ∞

$$\|h_n\|_1 = 1 - e^{-n} - n e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

car $n e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|h_n\|_1 = 1 - e^{-n} - n e^{-n} \leq 1$$

Déjà la suite h_n est bornée pour la norme 1

4) Par l'abondance : On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
 $\forall f \in \mathcal{C}([0,1]), \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|_1$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|h_n\|_\infty \leq \alpha \|h_n\|_1$, d'où
 $\forall n, \frac{\alpha}{n} \leq \alpha \times 1$. Or $n \rightarrow \infty$,
 Les inégalités fortes passent à la limite et donne
 $+\infty \leq \alpha$ ce qui est absurde

un tel réel α n'existe donc pas.

5) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$\leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt$$

$$\leq \|f\|_\infty$$

car $\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq \|f\|_\infty$
 et par croissance de l'intégrale

$B = 1$ convient

Exercice 2

Soit $f \in E$

$$|\phi(t)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} \times \sqrt{\int_0^1 1^2 dt}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée
 au fonction f et $t \mapsto 1$

Donc $|\phi(f)| \leq \|f\|_2$

Donc ϕ est continue

car elle est linéaire

oui

Soient $(f, g) \in E^2$. On montre que ψ est 1-lipschizienne

~~$$\psi(f-g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)| dt$$~~

~~$$\leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt$$~~

$$|\psi(f) - \psi(g)| = \left| \int_0^1 (|f(t)| - |g(t)|) dt \right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$

$$\leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$

$$\leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 (f(t)-g(t))^2 dt} \sqrt{\int_0^1 1^2 dt}$$

$$\leq \|f - g\|_2 \quad \text{d'après l'inégalité}$$

de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions

$$t \mapsto f(t) - g(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto 1.$$

Donc ψ est 1-lipschizienne

Donc ψ est continue

Exercice 3

1) Soit $\phi: \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto |f(0)| + |f(1)| + \left| \int_0^1 f(t) dt - 1 \right|$$

Ainsi

Exercice 3

$$E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty$$

1) Soient les trois applications suivantes

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(t) dt \end{aligned}$$

Ces trois applications sont linéaires. On:

$$\forall f \in E, \begin{cases} |\varphi_1(f)| \leq \|f\|_\infty \\ |\varphi_2(f)| \leq \|f\|_\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \forall f \in E, |\varphi_3(f)| &\leq \int_0^1 |f(t)| dt && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \\ &\leq \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Donc ces trois applications sont continues. On:

D'où les images réciproques des fermés $\{0\}$ et $\{1\}$ par φ_1, φ_2 et φ_3 sont des fermés car ces applications sont continues.

$$\text{Or } A = \varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_3^{-1}(\{1\})$$

On dit l'intersection finie de fermés est un fermé

Donc A est un fermé

on:

2) Soit $f \in A$

$$1 = \int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 \|f\|_{\infty} dt = \|f\|_{\infty} = \|f - 0\|_{\infty} = \|0 - f\|_{\infty}$$

Donc 1 minore $\|0 - f\|_{\infty}$

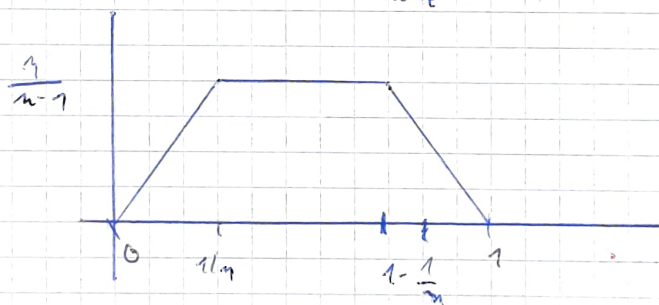
Or la borne inf est le plus grand des mineurs

Donc $1 \leq \inf_{f \in A} (\|0 - f\|_{\infty})$

su :

On considère ensuite la suite de fonctions définies par (pour $n \geq 3$)

$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} \frac{n^2}{n-1} t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{n}{n-1} & \text{si } t \in]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[\\ \frac{n^2}{n-1} (1-t) & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



Donc $\forall n \geq 3, f_n \in A$

car $\checkmark$ la fonction f_n est continue et $f_n(0) = f_n(1) = 0$

$$\text{et } \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{n}{n-1} \times (1 - \frac{1}{n}) = 1$$

De plus $\|0 - f_n\|_{\infty} = \|f_n\|_{\infty} = \frac{n}{n-1}$

Ad [Donc la suite $(\|f_n\|_{\infty})$ tend vers 1 en décroissant]

Donc $\forall n, d(0, A) \leq \frac{n}{n-1}$ car l'inf est un mineur. Les inégalités forment la limite $n \rightarrow \infty$, donc $d(0, A) \leq 1$.

D'où $\inf_{f \in A} \|0 - f\| = 1$

c'est à dire

$$d(0, A) = 1$$

3) Par l'absurde : On suppose que il existe $f \in A$
tel que $d(0, A) = d(0, f)$

alors $\|f\|_\infty = 1$

~~Or~~ Or $f \in A$ d'où $\int_0^1 |f(t)| dt = 1$

Or $1 = \int_0^1 dt$

d'où $\int_0^1 (f(t) - 1) dt = 0$

Or la fonction $t \mapsto f(t) - 1$ est continue) on
et négative) on car $\forall t \in [0, 1], f(t) \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty = 1$

D'où cette fonction est nulle d'où

$\forall t \in [0, 1], f(t) = 1$

D'où $f(0) = 1$ Or $f(0) = 0$ car $f \in A$

ce qui est absurde