Annexe C Séries de vecteurs et exponentielle de matrices

Nous avons vu au chapitre XI que toute application linéaire ou multilinéaire sur un *evn* de dimension finie est continue et que, par conséquent (exemples 40 & 42), sont des applications continues :

- la transposée $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), A \mapsto A^T$;
- un changement de base $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), A \mapsto P^{-1}AP$ (où P est une matrice inversible) ;
- la multiplication de deux matrices $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}),\ (A,B) \mapsto A \cdot B$.

Par suite, si (A_k) et (B_k) sont deux suites de matrices carrées telles que $A_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$ et $B_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} B$, alors :

$$A_k^T \longrightarrow A^T \tag{1}$$
$$P^{-1} \cdot A_k \cdot P \longrightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P \tag{2}$$
$$A_k \cdot B_k \longrightarrow A \cdot B \tag{3}$$

On s'intéresse maintenant non plus à des suites mais à des séries de vecteurs.

Définition 1
Soit (u_n) une suite de vecteurs d'un espace vectoriel normé E. On dit que la série de vecteurs $\sum u_n$:

- converge si la suite des vecteurs $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge ;
- converge **absolument** si la série de réels $\sum \|u_n\|$ converge.

Proposition 2
Dans un *evn* de dimension finie, si une série de vecteurs converge absolument, alors elle converge.

Preuve — Toutes les normes étant équivalentes (car l'*ev* est supposé de dimension finie d), on choisit une norme adaptée à la question : $\|u_n\|_\infty = \max(|u_{n,1}|, \cdots, |u_{n,d}|)$ où les $u_{n,i}$ sont les coordonnées du vecteur u_n dans une base de l'*ev*. Alors la série de vecteurs $\sum u_n$ converge *ssi* la série $\sum u_{n,i}$ de chaque cooordonnée converge. Et c'est le cas car la série $\sum |u_{n,i}|$ converge. En effet $|u_{n,i}| \leq \|u_n\|_\infty$ et la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge par hypothèse. □

On munit l'*ev* $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative (celle de l'exemple 45 du chapitre XI, ou une autre). Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $\sum a_n z^n$ une série entière (réelle ou complexe) de rayon de convergence R :

$$\text{si } \|A\| < R, \text{ alors la série de matrices } \sum a_k A^k \text{ converge.}$$

Preuve — Pour que la série de matrices $\sum a_k A^k$ converge, il suffit qu'elle converge absolument (d'après la proposition précédente, car l'*ev* $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est de dimension finie). Or $\|a_k A^k\| = |a_k|\,\|A^k\| \leq |a_k|\,\|A\|^k$ car on a pris soin de choisir une norme sous-multiplicative. Et la série de réels $\sum |a_k|\|A\|^k$ converge car $\|A\| < R$. □

Exemple 3 (**séries géométriques**) — *On munit l'ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative : si $\|A\| < 1$, alors $I_n - A$ est inversible et*

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

De même si la matrice A est nilpotente.

Preuve — D'une part, la série de matrices $\sum A^k$ converge si $\|A\| < 1$ car 1 est le rayon de convergence de la série entière $\sum z^k$. D'autre part, $(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{N} A^k = I_n - A^{N+1}$. Le premier membre tend vers $(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ d'après (3) ; le second membre tend vers I_n car $\|A\| < 1 \Rightarrow \|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1} \to 0$. À la limite $N \to \infty$, $(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I_n$.

Si la matrice A est nilpotente d'indice ν, alors on use d'un télescope : $(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{\nu-1} A^k = I_n - A^\nu = I_n$. □

DÉFINITION 4
On appelle **exponentielle d'une matrice** $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ quelconque, et on note $\exp(A)$ ou e^A, la matrice

$$\exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Cette série de matrices converge quelle que soit la matrice carrée A car la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

EXERCICE 5 — *Montrer que* $\mathrm{e}^{\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$ *et que l'exponentielle de la matrice antisymétrique* $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ *est la matrice de rotation* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 6
Soient $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible, $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$:

$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1} \left(\exp A\right) P \quad (4)$$

$$\exp(A^T) = (\exp A)^T \quad (5)$$

$$\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent, alors } B\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^A B \text{ et } \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B \quad (6)$$

$$\text{La matrice } \mathrm{e}^A \text{ est inversible et } \left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A} \quad (7)$$

$$\text{La fonction } A \mapsto \mathrm{e}^A \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad (8)$$

$$\text{La fonction } t \mapsto \mathrm{e}^{tA} \text{ est dérivable et } \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}A \quad (9)$$

Preuve —(4) : $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ d'où $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)P$. Si N tend vers ∞, alors : le premier membre tend vers $\exp\left(P^{-1}AP\right)$; le second vers $P^{-1}\left(\exp A\right)P$ en utilisant (3).

(5) : $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(A^T)^k = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)^T$. Si N tend vers ∞, alors : le premier membre tend vers $\exp(A^T)$; le second vers $(\exp A)^T$ en utilisant (1).

(6) : Si $AB = BA$, alors $B\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)B$ et l'égalité passe à la limite grâce à (3). Soient $U_N = \sum_{0 \leq i \leq N} \frac{1}{i!}A^i$, $V_N = \sum_{0 \leq j \leq N} \frac{1}{j!}B^j$ et $W_N = \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!}(A+B)^k$. On veut montrer que $U_NV_N - W_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$: $\frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}$ car $AB = BA$. D'où $W_N = \sum_{i+j \leq N} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}$ et $U_NV_N - W_N = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq N \\ N+1 \leq i+j}} \frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}$ en prenant soin de choisir une norme sous-multiplicative. Par suite $\|U_NV_N - W_N\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq N \\ N+1 \leq i+j}} \frac{\|A\|^i}{i!}\frac{\|B\|^j}{j!} = u_Nv_N - w_N$, où $u_N = \sum_{i=0}^{N} \frac{\|A\|^i}{i!} \to \mathrm{e}^{\|A\|}$, $v_N = \sum_{j=0}^{N} \frac{\|B\|^j}{j!} \to \mathrm{e}^{\|B\|}$ et $w_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(\|A+B\|)^k \to \mathrm{e}^{\|A+B\|}$. Donc $u_Nv_N - w_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|U_NV_N - W_N\| \to 0$.

(7) : $I_n = \exp(A + (-A)) = e^A e^{-A} = e^{-A} e^A$ d'après (6) car les matrices A et $-A$ commutent.

(8) : Il s'agit de montrer que $\exp(A+H) \underset{H\to 0}{\longrightarrow} \exp A$. Or

$$\|\exp(A+H) - \exp A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+H)^k - A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{(A+H)^k - A^k}{k!} \right\|$$

d'après l'inégalité triangulaire car ces séries convergent. D'après l'exercice 46 du chapitre XI,

$$\|(A+H)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k$$

en prenant soin de choisir une norme sous-multiplicative. D'où

$$\|\exp(A+H) - \exp A\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\| + \|H\|) - \exp \|A\|.$$

Ces dernières exponentielles sont des exponentielles de réels, d'où $\exp(\|A\| + \|H\|) - \exp\|A\| \underset{\|H\|\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\|\exp(A+H) - \exp A\| \underset{\|H\|\to 0}{\longrightarrow} 0$.

(9) : D'après (6), $\dfrac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \dfrac{e^{hA} - I_n}{h} e^{tA}$. Or $\dfrac{e^{hA} - I_n}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} A$ car

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{e^{hA} - I_n}{h} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (hA)^k \right\| \leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \|(hA)^k\| \text{ par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \|hA\|^k = \frac{e^{\|hA\|} - 1 - \|hA\|}{|h|} \text{ en choisissant une norme sous-multiplicative} \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ car } e^{\|hA\|} - 1 - \|hA\| = O(h^2).
\end{aligned}$$

□

Exercice 7 — *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Montrer que :*

1. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(e^A) = e^{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A}$;
2. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}\, A}$;
3. $SO_n(\mathbb{R}) = e^{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$, *autrement dit :*
   — *si* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, *alors* $e^A \in SO_n(\mathbb{R})$;
   — *si* $B \in SO_n(\mathbb{R})$, *alors il existe* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $B = e^A$.