Corrigé de l'exercice 1 du TD 20.

Merci à :
CASSIN
Naoelle

Exercice 1 :

- Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^3+y^3}{x^2+2y^2} \text{ sinon} \end{cases}$$

en $(0,0)$

i.e $|f(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(0,0) = 0$

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+2y^2}$$

On

$$|f(x,y)| \geq 0$$

et

$$\begin{cases} |x^3+y^3| \leq |x^3| + |y^3| \text{ d'après l'inégalité triangulaire} \\ |x^3| = |x|^3 = \sqrt{x^2}^3 \leq \sqrt{x^2+y^2}^3 \\ |y^3| = |y|^3 = \sqrt{y^2}^3 \leq \sqrt{x^2+y^2}^3 \\ x^2+2y^2 \geq \sqrt{x^2+y^2}^2 \end{cases}$$

Donc

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}^3}{\sqrt{x^2+y^2}^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, ~~on a bien~~ :

$$|f(x,y)| \xrightarrow[\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} 0 = f(0,0)$$

Oui

• La fonction g n'est pas continue en $(0,0)$ car

$$g(y^2,y) = \frac{y^2 y^2}{(y^2)^2+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)$$ Oui

• Montrons que h est continue en $(0,0)$

i.e. $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(0,0)$

i.e. $|f(x,y)| \xrightarrow[\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} f(0,0) = 0$

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^4|}{||x|+y^2|} \geq 0$$

D'une part,

$$\begin{cases} |x^3+y^4| \leq |x^3|+|y^4| \\ |x^3| = |x|^3 = \sqrt{x^2}^3 \leq \sqrt{x^2+y^2}^3 \\ |y^4| = |y|^4 = \sqrt{y^2}^4 \leq \sqrt{x^2+y^2}^4 \end{cases}$$

Donc $|x^3+y^4| \leq \sqrt{x^2+y^2}^3 + \sqrt{x^2+y^2}^4$

D'autre part, pour $|x|<1$ oui

$$|x| \geq x^2$$

donc $||x|+y^2| \geq |x^2+y^2| = \sqrt{x^2+y^2}^2$

~~On a~~ Alors

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}^3+\sqrt{x^2+y^2}^4}{\sqrt{x^2+y^2}^2} = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}^2$$

Or $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}^2 \xrightarrow[\sqrt{x^2+y^2}\to 0]{} 0$

D'après le théorème des gendarmes,

$|f(x,y)| \xrightarrow[\sqrt{x^2-y^2}\to 0]{} 0$ oui