Exercice 1 - Drôle de norme (⋆⋆)

Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $N : (x,y) \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Tout d'abord si $N(x,y)=0$ en particulier $\forall t \in \mathbb{R},\ |x+ty|=0$ en prenant $t=0$ on obtient $x=0$ puis en prenant $t=1$ on trouve $y=0$.

L'homogénéité ne pose aucune difficultés, prenons alors (x,y) et (x',y') deux couples dans $\mathbb{R}^2$, on a pour $t\in\mathbb{R}$:

$$|(x+x')+t\,(y+y')| \leq |x+ty|+|x'+ty'|$$

D'où l'on tire :

$$\frac{|(x+x')+t\,(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{|x'+ty'|}{\sqrt{1+t^2}} \leq N(x,y)+N(x',y')$$

Finalement par passage à la borne supérieure adns l'inégalité précédente on obtient l'inégalité triangulaire pour la norme N.

2. Comparer N à la norme euclidien $N_2 : (x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|x+ty| \leq \sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{1+t^2}$$

On en déduit alors que $N\leq N_2$, pour la majoration réciproque il faut trouver la bonne valeur de t, pour cela on considère à $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé la fonction $f : t\mapsto \frac{(x+ty)^2}{1+t^2}$ il s'agit d'un fonction dérivable dont la dérivée s'exprime après simplification :

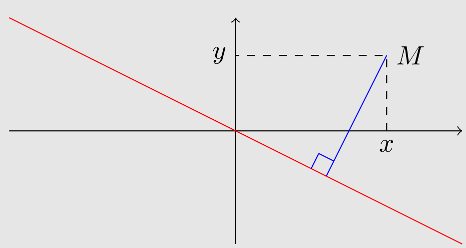
$$f'(t)=\frac{2\,(x+ty)\,(y-tx)}{(1+t^2)^2}$$

Si $x\neq 0$ alors f est maximale pour $t=\frac{y}{x}$ et en évaluant on trouve $N(x,y)=N_2(x,y)$, sinon on remarque que :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{|ty|}{\sqrt{1+t^2}}=|y|=N_2(x,y)$$

Et donc $N\geq N_2$, finalement on vient de démontrer $N=N_2$.

Une explication possible de ce phénomène est de considérer un point $M(x,y)$ et la droite d'équation $X+tY=0$, on remarque alors que la distance de M à cette droite en exactement $\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$, cette distance est toujours inférieur à N_2 car O est un point de la droite. Enfin en faisant varier t on peut obtenir une droite perpendiculaire à (OM) pour laquelle on obtient alors $N\geq N_2$.



Exercice 2 - Suites de polynôme (⋆)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

1. Démonter que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

Tout d'abord ces deux quantités sont bien définies, pour n_1 la somme est en réalité finie donc pas de soucis de convergence et pour N_2 les fonctions polynôme étant continue par le théorème de Weierstrass, sur tous compacts, elles admettent une borne supérieure qui est atteinte.

Pour N_1 par linéarité de la dérivation et inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ on a $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (P,Q) \in E^2$, $\left|(P+Q)^{(k)}(0)\right| \leq \left|P^{(k)}(0)\right| + \left|Q^{(k)}(0)\right|$, et donc en passant à la somme on trouve $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. Enfin si $N_1(P) = 0$ alors 0 est une racine de multiplicité infinie, en particulier $P = 0$.

Pour N_2 on a :

$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q)$$

Par passage à la borne supérieure dans l'inégalité on trouve alors $N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$. Enfin si $N_2(P) = 0$ alors $\forall t \in [-1,1]\,,\ P(t) = 0$ donc P admet une infinité de racines en particulier $P = 0$.

2. Étudier pour chacune de ses normes la convergence de la suite (P_n) où $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n!\,(X) = \frac{1}{n}X^n$. Conclusion.

On remarque que l'on a $N_1(P_n) = (n-1)!$ et $N_2(P_n) = \frac{1}{n}$. Ainsi (P_n) converge vers 0 pour N_2 mais pour N_1 cette suite n'est pas bornée, en particulier elle ne converge pas. On en déduit que les deux normes ne sont pas équivalentes, ce qui ne contredit pas le théorème du cours car E n'est pas de dimension finie.

Exercice 3 - Topologie sur $l^\infty(\mathbb{R})$ ($\star\star$)

Soit $l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes, et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites convergentes vers 0.

1. On considère l'application limite :

$$L : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$$

Montrer que L est une application linéaire continue.

La linéarité de L découle des propriétés de compatibilité entre limite et somme/produit. Pour montrer que L est continue on va montrer qu'elle est lipschitzienne, soit donc $u = (u_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, on a par définition de la borne supérieure :

$$\|u\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{|u_n|} \geq |u_n|$$

Or (u_n) converge, et par continuité de $|.|$ on en déduit que $(|u_n|)$ converge également. Par passage à la limite dans l'inégalité on obtient :

$$\|u\|_\infty \geq \lim_{n\to+\infty} |u_n|$$

Enfin en utilisant de nouveau la continuité de la valeur absolue on trouve :

$$\begin{aligned}|L(u)| &= \left|\lim_{n\to+\infty} u_n\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} |u_n| \\ &\leq \|u\|_\infty\end{aligned}$$

Ainsi L est bien une application 1-Lipschitzienne, elle est donc continue.

2. Démontrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un fermé de $l^\infty(\mathbb{R})$.

Le premier réflexe est de chercher à utiliser la question précédente. Ainsi en remarquant que l'on a :

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = L^{-1}(\{0\})$$

On en déduit immédiatement, par continuité de L, que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Sinon on peut mettre les mains dans le cambouis de la façon suivante : Soit $\left(u^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, qui converge vers $u \in l^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$:

$$\left\|u - u^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon$$

ce qui signifie donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|u_n - u_n^{(k)}\right| < \varepsilon$$

Or pour $k \geq k_0$ fixé $u^{(k)} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{(k)} = 0$, et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|u_n^{(k)}\right| < \varepsilon$, et donc pour $n \geq n_0$ d'après l'inégalité triangulaire on en déduit :

$$\begin{aligned}|u_n| &= \left|u_n - u_n^{(k)} + u_n^{(k)}\right| \\ &\leq \left|u_n - u_n^{(k)}\right| + \left|u_n^{(k)}\right| \\ &\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi donc u converge vers 0, c'est donc un élément de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ce qui permet d'affirmer que ce dernier est un fermé.

3. On note C l'ensemble des suites s'annulant à partir d'un certains rang. Montrer que C est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mais pas dans $l^\infty(\mathbb{R})$.

Tout d'abord on remarque que $C \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de façon immédiate et comme $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé par la question précédente, on en déduit que $\overline{C} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Réciproquement soit $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on pose :

$$u_n^{(k)} = \begin{cases} u_n & \text{si} \quad n \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^{(k)} \in C$ et de plus $\left\|u^{(k)} - u\right\|_\infty = \sup\limits_{n>k} |u_n|$. Soit $\varepsilon > 0$ comme $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > k,\ |u_n| < \varepsilon$. Ainsi pour k suffisamment grand on a $\left\|u^{(k)} - u\right\|_\infty \leq \varepsilon$ et donc $u \in \overline{C}$ d'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

On en déduit alors que C est bien dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. En revanche comme $\overline{C} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \neq l^\infty(\mathbb{R})$ on en déduit que C n'est pas dense dans $l^\infty(\mathbb{R})$. Pour le montrer directement il suffit de considérer la suite constante égale à 1 dont la distance avec tout élément de C est supérieur ou égale à 1.

Exercice 4 - Suite de matrices inversibles ($\star$)

Soit (A_n) une suite de matrice inversibles *i.e* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in Gl_k(\mathbb{R})$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{ccc} A_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & A \\ A_n^{-1} & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & B \end{array}\right. \tag{2}$$

Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$. Peut-on retirer l'hypothèse (2) ?

On remarque que l'application $\det : \mathscr{M}_k(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application multi-linéaire et comme $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ est un espace de dimension finie on en déduit que det est continue.

Dès lors comme $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ on obtient $\det(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \det(A) < +\infty$. Or on a également $A_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$ et donc $\det\big(A_n^{-1}\big) = \frac{1}{\det(A_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \det(B) < +\infty$. En particulier $\frac{1}{\det(A)} = \det(B)$ on a $\det(A) \neq 0$ et donc A est inversible.

De plus on remarque que par continuité de la multiplication matricielle $I_k = A_n^{-1} \times A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B \times A$ d'où par unicité de la limite $B \times A = I_k$ et on raisonne de même pour trouver $A \times B = I_k$ donc $A^{-1} = B$.

La dernière hypothèse est vitale car sinon on peut considérer par exemple $A_n = \frac{1}{n} I_k$ qui est bien une suite de matrice inversible dont la limite est la matrice nulle qui n'est donc pas inversible.

Exercice 5 - Ensemble des projecteurs ($\star\star$)

On note $\mathcal{P} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de projections. Montrer que $\mathcal{P}$ est fermé.

On procède par caractérisation séquentielle, soit donc $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge vers un élément $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition on a $P_k^2 = P_k$ En particulier $P_k^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P$. D'autre part par continuité du produit matricielle on peut affirmer que $P_k^2 = P_k \times P_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P \times P = P^2$, finalement par unicité de la limite on trouve $P^2 = P$ et donc $P \in \mathcal{P}$. On peut donc affirmer que $\mathcal{P}$ est un fermé.

Exercice 6 - Caractérisation de la continuité des formes linéaires ($\star\star$)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et $f \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si f n'est pas continue on peut trouver une suite (x_n) de vecteurs unitaires de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_n)| = +\infty$.

Si f n'est pas continue en particulier elle n'est pas continue en 0, il existe alors une suite $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 pour laquelle $(f(y_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Autrement dit quitte à extraire on peut supposer que cette dernière suite est minorée par $m > 0$. En particulier $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \neq 0$, on considère alors la suite $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Vérifions alors que la suite (x_n) convient. Tout d'abord par construction $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| = 1$, ensuite on a par linéarité de f :

$$|f(x_n)| = \left| f\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right| = \frac{|f(y_n)|}{\|y_n\|}$$

Finalement comme (y_n) tend vers 0 on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_n)| = +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

2. En déduire que f est continue si, et seulement si, $\ker(f)$ est fermé.

Le sens direct ne pose aucune difficulté. En effet si f est continue l'image réciproque d'un fermé est un fermé, et comme $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ on en déduit le résultat. Sinon on aurait aussi pu faire de la caractérisation séquentielle...

Pour la réciproque c'est plus délicat. Mais l'exercice, par l'intermédiaire de la question précédente, nous invite à raisonner par contraposée, en supposant donc que f n'est pas continue. En particulier il existe une suite (x_n) de vecteurs unitaires de E telle que $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n)| = +\infty$. On va utiliser cette suite pour construire une suite d'élément du noyau de f qui converge vers un élément n'appartenant pas au noyau.

Si $E \setminus \ker(f) = \varnothing$ alors $E = \ker(f)$ et donc $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ qui est continue ce qui est absurde. Soi donc $x \in E \setminus \ker(f)$, on pose :

$$u_n = x - \frac{f(x)}{|f(x_n)|}x_n$$

On vérifie facilement que $f(u_n) = 0$ dès lors $(u_n) \in (\ker_! (f))^{\mathbb{N}}$. De plus on a :

$$\|u_n - x\| = \left\|\frac{f(x)}{|f(x_n)|}x_n\right\| = \frac{|f(x)|}{|f(x_n)|} \times \|x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci assurant alors la convergence de (u_n) vers $x \notin \ker(f)$. On a donc exhibé une suite d'élément du noyau de f qui converge vers un élément n'appartenant pas au noyau. On en déduit que ce dernier n'est pas fermé, ce qui conclut notre démonstration par contraposée.