

# D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

12

**Exercice 1.** On fait l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce indéfiniment, qui tombe sur *Pile* avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$  et sur *Face* avec la probabilité  $q = 1 - p$ .

Soit un entier naturel  $r \geq 1$ . On note  $T$  le temps d'attente du premier *Pile* et  $X$  le temps d'attente du  $r$ -ième *Pile*. Par exemple :  $T(FFPFP \dots) = 3$  et, si  $r = 2$ , alors  $X(FFPFP \dots) = 5$ .

1. Quel est l'ensemble  $T(\Omega)$  des valeurs prises par la variable aléatoire  $T$ ? Quelle est, pour chaque  $n \in T(\Omega)$ , la probabilité  $P(T = n)$ ? Que valent l'espérance  $E(T)$  et la variance  $V(T)$ ? 0,5
2. Soit  $n \geq r \geq 1$ . Soient  $A$  l'événement « La pièce est tombée  $r - 1$  fois sur *Pile* au cours des  $n - 1$  premiers lancers ». Calculer la probabilité  $P(A)$ . 1
3. En déduire, pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité  $P(X = n)$ . 0,5
4. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$  et calculer, pour  $x \in ]-R, +R[$ , la somme  $\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} x^{n-r}$ . 2
5. Montrer, par le calcul, que la somme  $\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n)$  vaut bien 1. Qu'en déduire? 0,5
6. Montrer que, pour tout  $x \in ]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$ ,  $\sum_{n=r}^{\infty} P(X = n)x^n = \left(\frac{px}{1-qx}\right)^r$ . 0,5
7. Montrer que la variable aléatoire  $X$  est d'espérance finie et calculer cette espérance  $E(X)$ . 1
8. Montrer que la variable aléatoire  $X^2$  est d'espérance finie et que  $V(X) = \frac{rq}{p^2}$ . 1

Hyp: suite d'événements  
indépendants  
( $T=n$ )

11

**Exercice 2.** 1. Montrer que, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ ,

$$\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

*tan' x tan^2 0,5*  
*(tan x tan)^{(n)} 1*

2. Montrer que, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, +\frac{\pi}{2}[$ ,

$$\tan^{(n)}(x) \geq 0.$$

*0,5*

3. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral et ses hypothèses pour une fonction  $f$  sur un segment  $[a, b]$ . 1

4. Soit, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}$ . Montrer que la série  $\sum a_k x^k$  converge pour tout  $x \in [0, +\frac{\pi}{2}[$ . 2

5. Montrer que la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  est définie au moins sur  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ . 1

6. Calculer  $a_0$  et  $a_1$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

1

7. Montrer que, pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ ,

$$S'(x) = 1 + S^2(x).$$

*dérivation terme à terme 1*  
*Produit de Cauchy 1*

8. Montrer que la fonction  $\tan$  est développable en série entière sur  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ . 2

13

**Exercice 3** (tiré de MINES-PONTS - 2017 - MP - MATH 1).

Soit  $I$  le segment  $[-1, +1]$ . Soient  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  et  $E_1$  le sous-espace vectoriel  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  formé des fonctions de  $E$  qui sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $W_n$  l'intégrale de Wallis  $\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$ .

(a) Montrer que la suite numérique  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et strictement positive.

(b) Établir pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une relation entre  $W_{n+2}$  et  $W_n$ . En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

1

(c) Montrer que  $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ . 2

*W\_n ~ W\_{n+1} car ... 1*  
*W\_n^2 ~ ... 0,5*  
*W\_n ~ ... car W\_n > 0 0,5*

2. Si  $f \in E$ , on définit la fonction  $u(f)$  par :

$$\forall x \in I, u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t)) dt.$$

On admettra que la fonction  $u(f)$  est continue sur  $I$  et que  $u$  est donc un endomorphisme de  $E$ .

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la fonction  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$  est un vecteur propre de  $u$ . (Par convention,  $f_0(x) = 1$  pour tout  $x \in I$ .) 0,5

(b) Si  $f \in E_1$ , on définit la fonction  $v(f)$  par :

$$\forall x \in I, v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin(t)) dt.$$

Montrer que  $v$  est une application linéaire de  $E_1$  vers  $E$ . Et calculer  $v(f_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. On munit l'espace vectoriel  $E$  de la norme  $\|\cdot\|$  définie pour tout  $f \in E$  par :

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

(a) Montrer que l'endomorphisme  $u$  est une application continue de  $(E, \|\cdot\|)$  vers  $(E, \|\cdot\|)$ .

(b) Montrer que l'application  $v$  n'est pas continue de  $(E_1, \|\cdot\|)$  vers  $(E, \|\cdot\|)$ .

4. Soit  $D$  l'ensemble des fonctions de  $E$  qui sont développables en série entière. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des coefficients du développement en série entière d'une fonction  $f \in D$ . Montrer que  $D$  est stable par  $u$ .  
Quels sont les coefficients du développement en série entière de  $u(f)$  ?

21

**Exercice 4.** On veut prouver que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{C})$  et, pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{M}_{pp}(\mathbb{C})$  :

$$\|A^k\|^{1/k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\} \quad (\heartsuit)$$

On note :

- $p$  un entier naturel non nul ;
- $\mathcal{M}_p$  l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{pp}(\mathbb{C})$  des matrices carrées d'ordre  $p$  à coefficients complexes ;
- pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_p$ , le réel

$$r(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

appelé le **rayon spectral** de la matrice  $A$ .

1. Soit  $x$  un réel strictement positif. Étudier  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{1/k}$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_p$ .
  - (a) Justifier l'existence de  $r(A)$ .
  - (b) Montrer que  $r(A) = 0$  si, et seulement si, la matrice  $A$  est nilpotente.
3. Soit  $\|\cdot\|$  une norme sous-multiplicative sur  $\mathcal{M}_p$ , autrement dit elle vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

(a) Soient  $A \in \mathcal{M}_p$  et  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Montrer qu'il existe une matrice non nulle  $B \in \mathcal{M}_p$  telle que  $AB = \lambda B$ . En déduire que :

$$r(A) \leq \|A\|$$

(b) Soit  $A \in \mathcal{M}_p$  telle que  $\|A\| < 1$ . Montrer successivement que :

- i. la matrice  $I_p - A$  est inversible.
- ii. la suite  $(A^k)$  converge vers la matrice nulle.
- iii. la suite  $(C_k)$ , définie par  $C_k = I_p + A + \dots + A^k$ , converge et calculer sa limite. (On pourra calculer le produit  $(I_p - A)C_k$ .)

(c) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_p$ .

i. Montrer qu'il existe un réel  $\gamma > 0$  tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\gamma} \|A^k\| \leq \|B^k\| \leq \gamma \|A^k\| \quad 0,5$$

ii. En déduire que, si la propriété ( $\heartsuit$ ) est vraie pour  $A$ , alors elle l'est encore pour  $B$ . *Grades 0,5*

4. Dans cette question, on choisit la norme définie sur  $\mathcal{M}_p$  par :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p, \quad \|A\| = p \times \max_{1 \leq i, j \leq p} |a_{i,j}| \quad \wedge(A)=\wedge(B) \quad 0,5$$

(a) Montrer que cette norme est sous-multiplicative. *0,5*

(b) Montrer que le résultat ( $\heartsuit$ ) est vrai lorsque la matrice  $A$  est diagonale, puis lorsque  $A$  est diagonalisable. *0,5*

(c) Soient  $T \in \mathcal{M}_p$  une matrice triangulaire supérieure, dont tous les termes diagonaux valent 1, et la matrice  $J = T - I_p$ . Montrer successivement que :

i.  $J^p = 0$ . *0,5*

ii. Il existe un réel  $M \geq 0$  tel que :

$$\forall k \geq p, \quad p \leq \|T^k\| \leq M \cdot k^{p-1} \quad 1$$

iii.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k} = 1$ . *0,5*

(d) Soient  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p$  et  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{R})$  deux matrices telles que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad |a_{i,j}| \leq b_{i,j} \quad 2$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \|A^k\| \leq \|B^k\|$$

(e) Montrer que la propriété ( $\heartsuit$ ) est vraie si la matrice  $A$  est triangulaire supérieure. (Dans le cas où  $r(A) > 0$ , on pourra utiliser la matrice  $A' = \frac{1}{r(A)} A$ ). *Si  $r(A) > 0$  0,5 Si  $r(A) > 0$  1,5*

(f) Montrer que la propriété ( $\heartsuit$ ) est vraie pour toute matrice de  $\mathcal{M}_p$ . *1*

5. Montrer que la propriété ( $\heartsuit$ ) est vraie pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_p$  et pour toute norme sur  $\mathcal{M}_p$ . *1*