Chapitre XIV Couples de variables aléatoires discrètes

Table des matières

XIV.1 Lois conjointe et marginales

Proposition-Définition 1

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors l'application

$$(X,Y) : \Omega \to X(\Omega) \times Y(\Omega), \ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

est aussi une *vad* appelée **le couple de vad** (X, Y).

Preuve — $((X,Y) = (a,b))$, qu'on note aussi $(X = a, Y = b)$, est par définition l'ensemble des résultats ω tels que $(X,Y)(\omega) = (a,b)$. Cet ensemble est donc égal à $(X = a) \cap (Y = b)$, qui est bien un événement car c'est l'intersection des deux événements $(X = a)$ et $(Y = b)$.

En outre, l'ensemble des valeurs prises par (X,Y) est fini ou dénombrable car inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, qui est fini ou dénombrable (on se souvient que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable). □

La loi de probabilité du couple (X,Y) est appelée **la loi conjointe** :

$$\forall (i,j) \in I \times J, \quad P((X,Y) = (a_i, b_j)) = P(X = a_i, Y = b_j) = P((X = a_i) \cap (Y = b_j)) = p_{ij}$$

où chaque p_{ij} appartient à $[0,1]$ et $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{ij} = 1$.

Les lois de probabilité de X et de Y sont appelées **les lois marginales**. La loi conjointe permet de retrouver les lois marginales :

$$\begin{cases} \forall i \in I, \quad P(X = a_i) = \displaystyle\sum_{j \in J} P(X = a_i, Y = b_j) \\ \forall j \in J, \quad P(Y = b_j) = \displaystyle\sum_{i \in I} P(X = a_i, Y = b_j) \end{cases}$$

Preuve — $\Omega = \displaystyle\bigcup_{j\in J} (Y = b_j)$, d'où : pour chaque $i \in I$, l'événement

$$(X = a_i) = (X = a_i) \cap \Omega = (X = a_i) \cap \bigcup_{j\in J} (Y = b_j) = \bigcup_{j \in J} ((X = a_i) \cap (Y = b_j))$$

est une union disjointe d'événements de probabilités p_{ij}, donc $P(X = a_i) = \displaystyle\sum_{j\in J} p_{ij}$. De même pour $P(Y = b_j)$. □

Mais les lois marginales ne permettent pas toujours de retrouver la loi conjointe. C'est ce que montre l'exercice suivant.

Exercice 2 — *Une boîte contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire au hasard l'une après l'autre deux boules. Soient les* vad *X et Y définies par : X est égale à 0 si la première boule tirée est blanche, à 1 si elle est noire. De même Y pour la deuxième boule.*

Compléter les tableaux suivants dans les deux cas :

1. *si le tirage se fait sans remise.*

	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	$p_{00}=$	$p_{01}=$	$P(X=0)=$
$X=1$	$p_{10}=$	$p_{11}=$	$P(X=1)=$
	$P(Y=0)=$	$P(Y=1)=$	1

2. *si le tirage se fait avec remise.*

	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	$p_{00}=$	$p_{01}=$	$P(X=0)=$
$X=1$	$p_{10}=$	$p_{11}=$	$P(X=1)=$
	$P(Y=0)=$	$P(Y=1)=$	1

Pour retrouver la loi du couple (X, Y) à partir des lois de chacune des variables X et Y, on peut faire des hypothèses supplémentaires : supposer par exemple que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

DÉFINITION 3
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. On dit que deux *va* X et Y sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si

$$\forall(a, b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \qquad P(X=a, Y=b)=P(X=a) \cdot P(Y=b).$$

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou non) de variables aléatoires. On dit que ces va sont :

— **deux à deux indépendantes** si

$$\forall(i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies \forall(a, b),\ P(X_i=a, X_j=b)=P(X_i=a) \cdot P(X_j=b) \ ;$$

— **indépendantes** si, pour toute partie finie non vide $J \subset I$,

$$\forall(a_j)_{j \in J},\ P\Big(\bigcap_{j \in J}(X_j=a_j)\Big)=\prod_{j \in J} P(X_j=a_j).$$

On admet les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Si deux *vad* sont indépendantes, alors :

1. $\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega), \quad P(X \in A, Y \in B)=P(X \in A) \times P(Y \in B)$;
2. pour toutes fonctions φ et ψ, les *vad* $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont aussi indépendantes.
3. (**Lemme des coalitions**) Soient φ et ψ deux fonctions. Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des va indépendantes, alors $\forall p \in [\![1, n-1]\!], \varphi(X_1, \cdots X_p) \perp\!\!\!\perp \psi(X_{p+1}, \cdots, X_n)$.

XIV.2 La somme de deux variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. La **somme** Z de deux *vard* X et Y est la *vard* définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Z(\omega)=X(\omega)+Y(\omega).$$

La loi conjointe du couple (X, Y) permet de calculer la loi de probabilité de la somme :

$$\forall c \in Z(\Omega), \qquad P(Z=c)=\sum_{(i, j) \in K(c)} p_{ij},$$

où $K(c)=\{(i, j) \in I \times J \mid a_i+b_j=c\}$.

Preuve — Pour chaque $c \in Z(\Omega)$, l'événement $(Z=c)$ est la réunion disjointe $\displaystyle\bigcup_{(i, j) \in K(c)}((X=a_i) \cap(Y=b_j))$. $\square$

Exercice 5 — *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires* ***indépendantes.*** *Montrer que :*

1. *(**stabilité de la loi binomiale**) si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, alors*
$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p).$$
où $n_1 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ a la même valeur pour les deux variables aléatoires. En déduire $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.
2. *(**stabilité de la loi de Poisson**) si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, alors*
$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2),$$
où $\lambda_1 \in]0, +\infty[$ et $\lambda_2 \in]0, +\infty[$. En déduire $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.

XIV.3 Espérance & variance d'une somme

Proposition 6
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Si deux variables aléatoires X et Y sont d'espérance finie, alors leur somme $X + Y$ est aussi d'espérance finie et :
$$E(X) + E(Y) = E(X + Y)$$
Mieux : pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha X + \beta Y$ est d'espérance finie et
$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$
Autrement dit : l'espérance est linéaire.

Proposition-Définition 7
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de *vard*. Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$
où $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est appelé la **covariance** de (X, Y) et est défini par
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)\right] = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

Remarque 8 —
1. $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$.
Preuve — $\mathrm{Cov}(X, X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$ *est donc égal à la variance de X.* □
2. *La covariance est une forme :*
   - $\boxed{S}$ symétrique *car* $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(Y \cdot X) - E(Y) \cdot E(X) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
   - $\boxed{B}$ bilinéaire *car l'espérance est linéaire : $E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2)$ et $E((\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)Y) = \alpha_1 E(X_1 Y) + \alpha_2 E(X_2 Y)$, d'où $\mathrm{Cov}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y) = E((\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \cdot Y) - E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \cdot E(Y) = \alpha_1 \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \alpha_2 \mathrm{Cov}(X_2, Y)$. La covariance est donc linéaire à gauche, et aussi à droite par symétrie.*
   - $\boxed{P}$ positive *car* $\mathrm{Cov}(X, X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$ *et la* vard $(X - E(X))^2$ *est à valeurs positives, donc son espérance aussi.*
   - $\boxed{\not D}$ non définie *car : si la* vard *est constante (et pas forcément nulle), alors $V(X) = 0$. Donc $V(X) = 0 \not\Longrightarrow X = 0$.*

Proposition 9
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de *vard*. Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors
$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2) \cdot E(Y^2) \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{Cov}(X, Y)]^2 \leq V(X) \cdot V(Y).$$

Preuve — $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Cov}(X,X)} \cdot \sqrt{\mathrm{Cov}(Y,Y)}$. C'est une inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\boxed{\mathrm{B}}\boxed{\mathrm{S}}\boxed{\mathrm{P}}$ suffisent à rendre vraie l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De même pour $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}$. □

DÉFINITION 10
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et (X,Y) un couple de *vard* tel que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie. On dit que X et Y ne sont pas corrélées si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

THÉORÈME 11
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et (X,Y) un couple de *vard* telles que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \iff \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \iff V(X+Y) = V(X)+V(Y).$$

L'exercice suivant montre que la réciproque de ce théorème est fausse :

$$X \textbf{ et } Y \textbf{ indépendantes} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} X \textbf{ et } Y \textbf{ non corrélées}$$

EXERCICE 12 — *Soit X une variable aléatoire qui prend, de manière équiprobable, les 3 valeurs -1, 0 et $+1$. Soit $Y = |X|$.*

1. *Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$.*
2. *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*

COROLLAIRE 13
Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des *vard* indépendantes deux à deux, alors la variance de la somme est égale à la somme des variances :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$$

Preuve — $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \mathrm{Cov}(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ d'où, par bilinéarité de la covariance :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + \sum_{i \neq j} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{=0}.$$

La covariance de chaque couple (X_i, X_j) est nulle si $i \neq j$ à cause de l'hypothèse d'indépendance deux à deux. □

PROPOSITION 14
Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soient G_X, G_Y et G_{X+Y} les fonctions génératrices des variables aléatoires X, Y et $X+Y$. Si X et Y sont **indépendantes**, alors

$$\forall t \in [-1, +1], \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

Preuve — Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = P(X = k)$ et $q_{n-k} = P(Y = n-k)$.

Alors $P(X+Y = n) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$ car :

— l'événement $(X+Y = n)$ est la réunion disjointe des événements $(X = k) \cap (Y = n-k)$, sa probabilité est donc la somme des probabilités $P\left((X = k) \cap (Y = n-k)\right)$;

— chaque probabilité $P\left((X = k) \cap (Y = n-k)\right)$ est égale au produit $p_k q_{n-k}$ car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, par hypothèse.

D"où $P(X+Y=n)t^n = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k q_{n-k} t^{n-k}$. La série $\sum P(X+Y=n)t^n$ est donc le produit de Cauchy des deux séries $\sum p_n t^n$ et $\sum q_n t^n$. Or ces deux séries sont absolument convergentes pour tout $t \in [-1,+1]$. Donc

$$\forall t \in [-1,+1], \quad \sum_{n=0}^{\infty} P(X+Y=n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n.$$

□

Exercice 15 — *Refaire l'exercice 5 en utilisant la proposition précédente.*

XIV.4 La loi faible des grands nombres

Théorème 16 (**loi faible des grands nombres**)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient (X_k) une suite de variables aléatoires discrètes et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Si les variables aléatoires X_k sont deux à deux indépendantes et si elles ont la même espérance μ et la même variance σ^2, alors

$$\forall a > 0, \quad P\left(|Z_n - \mu| \geq a\right) \leq \frac{\sigma^2}{na^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve — L'espérance de Z_n est $E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ car l'espérance est linéaire. D'où $E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu = \mu$.

La variance de Z_n est $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$. Or les variables aléatoires X_k sont deux à deux indépendantes, d'où $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$. Donc $V(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall a > 0, \quad P\left(|Z_n - E(Z_n)| \geq a\right) \leq \frac{V(Z_n)}{a^2}.$$

□

Exemple 17 — *On répète une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire une expérience aléatoire qui peut donner deux résultats : un succès avec la probabilité p ou un échec avec la probabilité $q = 1-p$. Soit Z_n la* ***fréquence*** *des succès après n épreuves :*

$$\forall a > 0, \quad P\left(|Z_n - p| \geq a\right) \leq \frac{pq}{na^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve — *Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, soit X_k la variable aléatoire définie par : $X_k = 1$ si le résultat de la $k-$ième épreuve est un succès et $X_k = 0$ si c'est un échec. Alors le nombre de succès après n épreuves est $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et la fréquence des succès est $Z_n = \frac{1}{n}S_n$. Supposons que les résultats de chaque épreuve sont indépendants deux à deux. D'après la loi faible des grands nombres,*

$$\forall a > 0, \quad P\left(|Z_n - p| \geq a\right) \leq \frac{pq}{na^2} \leq \frac{1}{4na^2}$$

car $X_k \sim \mathcal{B}(1,p)$, d'où : $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = pq$. □

Donc la probabilité que « la fréquence Z_n des succès s'écarte de la probabilité p » tend vers 0 quand le nombre n d'épreuves de Bernoulli tend vers ∞.