Colle 18 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

PAGES-MARCHAIS Louis

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel vectoriel euclidien et soit V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non triviaux.
Soit p_1 la projection orthognale sur V_1 et p_2 la projection orthogonale sur V_2.
On pose $\varphi = p_1 + p_2$.
Montrer que $0 < \det \varphi \leq 1$ et que $\det \varphi = 1$ si et seulement si V_1 et V_2 sont supplémentaires orthogonaux.

Solution **1.** *Remarquons que p_1+p_2 est autoadjoint car p_1 et p_2 le sont. Donc p_1+p_2 est diagonalisble dans une base orthonotmée de vecteurs propres.*
Pour tout $x\in E$ tel que $\|x\|=1$, $< p_1(x)+p_2(x)| >=< p_1(x)|x > + < p_2(x)|x >$. Comme p_i est un projecteur orthogonal, $< p_i(x)|x >\in[0,1]$. On en déduit que les valeurs propres de p_1+p_2 sont à valeurs dans $[0,2]$.
Mais $V_1\oplus V_2=E$,, donc $p_1(x)+p_2(x)=0$ implique $p_1(x)=p_2(x)=0$.
C'est-à-dire $x\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}=(V_1\oplus V_2)^{\perp}=\{0\}$. On en déduit que 0 n'est pas valeur propre.
D'autre part $p_1(x)+p_2(x)=2x$ implique $p_1(x)=p_2(x)=x$ puisque $\|p_i(x)\|\le\|x\|$ et on a égalité si et seulement si $x\in V_i$. Donc $x\in V_1\cap V_2=\{0\}$. 2 n'est pas valeur propre.
Le spectre de p_1+p_2 est donc à valeur dans $]0,2[$.
Soit $(e_1,\cdots,e_r)$ une base orthonormée de V_1 et $(e_{r+1}\cdots,e_n)$ une base orthonormée de V_2. Comme $V_1+V_2=E$, on sait que $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E.
Si $i\in[\![1,r]\!]$, alors $p_1(e_i)=e_i$ et si $i\in[\![r+1,n]\!]$, alors $p(e_i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{r}(e_i|e_j)e_j$ car $(e_1,\cdots,e_r)$ est une base orthonormée de V_1.
De même, $i\in[\![r+1,n]\!]$, alors $p_1(e_i)=e_i$ et si $i\in[\![1,r]\!]$, alors $p(e_i)=\displaystyle\sum_{j=r+1}^{n}(e_i|e_j)e_j$.
On en déduit que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M=\begin{pmatrix} I_r & A^T\\ A & I_{n-r}\end{pmatrix}\ \text{avec}\ A=\begin{pmatrix}(e_1|e_{r+1}) & \cdots & (e_r|e_{r+1})\\ \vdots & & \vdots\\ (e_1|e_n) & \cdots & (e_r|e_n)\end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant de φ en utilisant des opération sur les colonnes, c'est-à-dire

$$\det\varphi=\begin{pmatrix} I_r & A^T\\ A & I_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ -A & I_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r-A^TA & A^T\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}=\det(I_r-A^TA).$$

Notons que la matrice A^TA est symétrique, donc diagonalisable.
méthode 1 *Soit $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda\neq 1$: on obtient le système*

$$\begin{cases} X+A^TY=\lambda X\\ AX+Y=\lambda Y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A^TAX=(\lambda-1)^2X\\ AX=(\lambda-1)Y\end{cases}$$

On en déduit que les valeurs que les valeurs propres de A^TA sont à valurs dans $]0,1[$ et donc $\det(I_r-A^TA)=\det M\le 1$. On a égalité si et seulement 1 est l'unique valeur propre de M : c'est-à-dire $M=I_n$ et V_1 et V_2 sont orthogonaux.
Méthode 2 *On remarque que pour $X\in\mathcal{M}_{r,1}$, $A^TAX=p_2\circ p_1(x)$. On sait que A^TA est positive. Donc si $A^TAX=\lambda x$, avec $\lambda\ge 0$, on a comme $|||p_i|||=1$*

$$\lambda\|X\|=< p_2\circ p_1(X)|X >\le\|p_1(X)\|\le\|X\|\Rightarrow[0,1]$$

On en déduit que $\det(I_r-A^TA)\le 1$. On a égalité si et seulement si toutes les valeurs propres de A^TA sont nulles, c'est-à-dire $A^TA=0$.

RICORDEL Alan

Exercice 2. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques et positives.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme bilinéaire symétrique positive f sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors on a
$$\forall (i,j) \in (\{1, \ldots, n\})^2, (a_{i,j})^2 \leq a_{i,i} a_{j,j}$$
Que peut-on en déduire s'il existe i tel que $a_{i,i} = 0$?
2. Soit $U \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ que l'on écrit par blocs $U = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{R})$ sont des matrices carrées.
Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, avec $r \leq q$, telles que
$$A = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
3. On définit les matrices par blocs
$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } U' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
Calculer et simplifier $Q^{-1}UQ$. Puis faites de même avec $Q^{-1}U'Q$ et en déduire que U' est diagonalisable.
4. On considère maintenant V et V' deux matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que VV' est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times W$ où Δ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et $W \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
5. Montrer que VV' est diagonalisable.

Solution **2.**

1. $a_{i,j} = (AE_i|E_j) = 0$ *si* $a_{i,i} = 0$
2. *diagonaliser* A *en ordonnant les valeurs propres.*
3. $Q^{-1}UQ = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & P^{-1}B \\ B^TP & C \end{pmatrix}$.

   D'après 1, sur chaque on a $P^{-1}B = \begin{pmatrix} B' \\ 0 \end{pmatrix}$, *puisque pour chaque diagonale nulle, la ligne est nulle.*

   On a alors $Q^{-1}U'Q = \begin{pmatrix} D & 0 & B' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *diagonalisable car le noyau est de la bonne dimension.*
4. $V = P\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T$ *et* $VV' = P\left[\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^TV'P\right]P^T$
5. *On pose* $W = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$.

   On a $\begin{pmatrix} \sqrt{\Delta}A\sqrt{\Delta} & \sqrt{\Delta}B \\ B^T\sqrt{\Delta} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ *car semblable à* W *avec*

   $$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}.$$

   Donc $\begin{pmatrix} \sqrt{\Delta}A\sqrt{\Delta} & \sqrt{\Delta}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *diagonalisable et semblable à*

   $$\begin{pmatrix} \Delta A & \Delta B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W.$$

   On en déduit que VV' *est diagonalisable.*

EL GHRANDI Hugo

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul et m un entier naturel. On munit $\mathbb{R}^m$ du produit scalaire euclidien canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A dans la base canonique et $f^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice ${}^tA$ dans la base canonique.
On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^m$ est de type n (n entier supérieur ou égal à -1) si et seulement si $f^n = f^*$ (où f^* désigne l'adjoint de f).

1. Rappeler la définition et les propriétés de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien et donner des exemples d'endomorphismes f de $\mathbb{R}^m$ de type -1, 0 et 1.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ de type n où n un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé.
   (a) déterminer $f^{(n^2)}$ en fonction de f.
   (b) On pose $g = f^{n+1}$. Montrer que les seules valeurs propres possibles de g sont 0 et 1 puis montrer que g est un projecteur orthogonal.
   (c) Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires orthogonaux et que la restriction de f à son image est une isométrie.

Solution **3.**

1. *le type 0 ne concerne que l'identité de* $\mathbb{R}^m$*, le type -1 concerne les endomorphismes orthogonaux, le type 1 concerne les endomorphismes symétriques.*
2. (a) $f^{(n^2)} = (f^n)^n = (f^*)^n = (f^n)^* = (f^*)^* = f$

   (b) $g^n = f^{n^2+n} = f \circ f^* = f^* \circ f = f^{n+1} = g$ *donc* $X^n - X$ *est un polynôme annulateur de* g*. Ainsi, dans un premier temps, on peut dire que* $Sp(g) \subset \{0, 1, -1\}$ *et que* g *a au moins une valeur propre réelle car c'est un endomorphisme symétrique ; mais si -1 est une valeur propre de* g *et* x *un vecteur propre associé alors, d'une part* $\langle g(x), x\rangle = \langle f^* \circ f, x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2$ *et, d'autre part,* $\langle g(x), x\rangle = -\|x\|^2$*.* x *étant non nul, on conclut à une impossibilité. Ainsi* $Sp(g) \subset \{0, 1\}$*. Il n'y a donc que 3 cas :*

   — *si* $Sp(g) = \{0\}$ *alors* g *qui est diagonalisable est donc égal à l'endomorphisme nul ,*

   — *si* $Sp(g) = \{1\}$ *alors* g *est l'identité.*

   — *si* $Sp(g) = \{0, 1\}$ *alors* g*, qui est symétrique, vérifie*

   $$E_0(g) \oplus^{\perp} E_1(g) = \mathbb{R}^m$$

   donc, pour tout x *de* $\mathbb{R}^m$*, qui se décompose en* $y + z$ *avec* $y \in E_0$ *et* $z \in E_1$*, on a* $g^2(x) = g^2(y) = y = g(x)$ *donc* g *est le projecteur sur* $img = E_1(g)$ *dans la direction de* $\ker g = E_0(g)$ *qui sont orthogonaux.*

   Dans les 3 cas g *est un projecteur orthogonal.*

   (c) *on a bien sûr* $\ker f \subset \ker g$*, réciproquement, si* $x \in \ker g$ *alors* $\langle f^* \circ f(x), x\rangle = 0$ *donc* $\|f(x)\| = 0$ *donc* $x \in \ker f$*. Ainsi* $\ker f = \ker g$ *et puisque l'on a* $img = imf \circ f^* \subset imf$ *on obtient, avec le théorème du rang,* $imf = img$*. Ainsi* $\ker f$ *et* imf *sont bien supplémentaires orthogonaux. Enfin, si* $x \in imf$*, alors* $x \in img$ *c'est à dire* $x \in E_1(g)$ *donc* $f^* \circ f(x) = x$ *et* $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, g(x)\rangle = \|x\|^2$ *donc*

   $$\|f(x)\| = \|x\|.$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ de produit scalaire noté $(x|y)$ pour $x, y \in E$.
On dit qu'un endomorphisme de E $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$(u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

Soit $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si et seulement si pour toute base orthonormée de E, la matrice A associée à u relativement à cette base est antisymétrique : ${}^tA = -A$. Quelle est la dimension de $\mathcal{A}(E)$?
2. Montrer que le noyau et l'image de u sont supplémentaires et orthogonaux et que u est de rang pair.
3. Montrer que u^2 est un endomorphisme diagonalisble et que si λ est une valeur propre de u^2 de sous-espace propre E_λ, alors $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$.
4. En déduire l'existence d'une base orthormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et d'un entier p avec $2p \leq n$ et des réels non nuls α_1, ..., α_p tels que
$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad u(e_{2k-1}) = \alpha_k e_{2k} \text{ et } u(e_{2k}) = -\alpha_k e_{2k-1}$$
et $u(e_k) = 0$ si $k > 2p$.
5. On suppose que $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini dans la base canonique (f_1, f_2, f_3, f_4) par la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \\ -\beta & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer en fonction des f_i une base (e_1, e_2, e_3, e_4) vérifiant les conditions de la question précédente.

Solution **4.**

1. *La matrice de f dans une base orthonormée est $(f(e_j)|e_i) = -(e_j|f^*(e_i))$. Danc la matrice est antisymétrique. La dimension est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.*
2. *Les noyau et image sont certes en somme orthogonale, donc en somme directe, on se restreint à l'image qui est un isomorphisme. On se ramène ainsi à A inversible et $\det {}^tA = \det(-A) = \det A$ implique que $(-1)^n = 1$, et donc n pair. Dans le cas général, le rang de A est pair.*
3. *La matrice de u^2 est symétrique. et si $x \in E_\lambda$, $u^2(u(x)) = u(u^2(x)) = \lambda u(x)$, donc $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$.*
4. *On procède par récurrence sur n, si $u \neq 0$, alors il existe $x \in E$, $u(x) \neq 0$, $(u(x)|u(x)) = -(x|u^2(x)) \neq 0$, donc $u^2 \neq 0$ et soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de u^2 et $x \in E_\lambda$, $x \neq 0$. Il résulte de ce qui pécède que $E_x = \operatorname{vect}(x, u(x))$ est stable et $(x, u(x))$ est orthogonale, on normalise et la matrice de u restreint à E_x est $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \sqrt{-\lambda}$. De plus $E_x^\perp$ est aussi stable par u, on applique l'hypothèse de récurrence.*
5. *On calcule*

$$A^2 = \begin{pmatrix} -(\alpha^2+\beta^2) & 0 & -2\alpha\beta & 0 \\ 0 & -(\alpha^2+\beta^2) & 0 & -2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta & 0 & -(\alpha^2+\beta^2) & 0 \\ 0 & -2\alpha\beta & 0 & -(\alpha^2+\beta^2) \end{pmatrix}$$

Il est clair que $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de u^2 associés aux valeurs propres $-(\alpha+\beta)^2$ et $-(\alpha-\beta)^2$; on pose $e'_2 = u(e'_1) = -(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $e'_4 = -(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
La base (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est orthogonale, on la normalise et elle donne le résultat.