Colle n° 18

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Exercice 1. Soient E un espace euclidien et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. On dit qu'un endomorphisme f conserve l'orthogonalité si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x|y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x)|f(y) \rangle = 0.$$

1. On suppose que f est un endomorphisme conservant l'"orthogonalité.
   (a) Soient i et j distincts dans $[\![1,n]\!]$. Calculer $\langle f(e_i+e_j)|f(e_i-e_j)\rangle$ et en déduire que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (b) En déduire qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \lambda^2 \langle x|y\rangle$.
2. Montrer qu'un endomorphisme f conserve l'orthogonalité si, et seulement si, il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle g tels que $f = \lambda g$.

Exercice 2. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. Soient

$$\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad , \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{et} \quad \vec{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit f la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe. Écrire la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
2. Ecrire la matrice de passage de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et la matrice de passage de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vers $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
3. On suppose que $f(\vec{\imath}) = \vec{k}$. En déduire l'angle θ de la rotation f.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien. On appelle **réflexion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

1. Soit s une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H. Montrer que, pour tout vecteur $x \in E$, le vecteur $x - s(x)$ est orthogonal à H.
2. Soit un vecteur non nul $a \in E$. Montrer que l'application

$$s\ :\ E \to E,\ x \mapsto x - 2\frac{\langle a|x\rangle}{\|a\|^2}a$$

   est une réflexion.
3. Soient u et v deux vecteurs distincts de E tels que $\|u\| = \|v\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion s telle que $s(u) = v$.