Kdo du 07/03/2025

Intégrales à paramètre

Exercice 1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$ est définie sur $[0,+\infty[$, continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

- Soient $X = [0,+\infty[$, $T = [0,+\infty[$ et, pour tout $(x,t) \in X \times T$, $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$.

  (i) Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.

  (ii) Pour chaque $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est *cpm* sur T.

  (iii) Pour tout $(x,t) \in X \times T$, $|f(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge.

  Donc la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ est (définie et) continue sur $[0,+\infty[$.

- Soient $a > 0$, $X_a = [a,+\infty[$ et $T = [0,+\infty[$. Montrons que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X_a.

  (i) Pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur X_a car (*)

  (ii) Pour chaque $x \in X_a$, $\begin{cases} t \mapsto f(x,t) \text{ est } cpm \text{ et intégrable sur } T \text{ car (**)} \\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est } cpm \text{ sur } T \end{cases}$

  (iii) Pour tout $(x,t) \in X_a \times T$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at^2}$ et $\displaystyle\int_T \mathrm{e}^{-at^2}\,dt$ converge car $(***)$

  D'où la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. Ceci est vrai pour tout $a > 0$. Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

  (*) $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t^2 f(x,t)$ est continue sur X_a.

  (**) $|f(x,t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_T \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge.

  (***) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,dt$ est impropre en $+\infty$ et $\forall t \geq 1$, $\mathrm{e}^{-at^2} \leq \mathrm{e}^{-at}$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,dt$ converge.

Exercice 2 (*CCINP MP-MPI Math 1 2024*)**.**

1) Montrer que l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,dt$ est absolument convergente, pour tout réel x.

2) Calculer $F(0)$ et $F(1)$. Comparer $F(x)$ et $F(-x)$.

3) Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Étudier $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$ ▷ **exercice 14 du chapitre V**.

5) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

6) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

7) Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $F'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ et calculer $F'(1)$.

8) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ est convergente et la calculer.

9) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.