Mathématiques · Révisions · Suites et Séries

Merci à RomainLelaidier

Exercice 1.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{th}(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ car $e^{-2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$u_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1$ qui ne change pas de signe. D'après le théorème de sommation des équivalents,

$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ d'où $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.

2) On remarque que $v_n = n - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{th}(k) = n - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{th}(k) = \sum_{k=1}^{n} (1 - \mathrm{th}(k)) = \sum_{k=1}^{n} w_k$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 1 - \mathrm{th}(n) = 1 - \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = \frac{2e^{-2n}}{1+e^{-2n}}$.

Comme $e^{-2n} \geq 0$, $0 \leq w_n = \frac{2e^{-2n}}{1+e^{-2n}} \leq 2e^{-2n}$ d'où $0 \leq v_n \leq \sum_{k=1}^{n} 2e^{-2k}$ (*).

$|e^{-2}| < 1$ donc la série géométrique $\sum 2e^{-2n} = 2\sum (e^{-2})^n$ converge. et sa somme vaut

$\sum_{k=1}^{\infty} 2e^{-2k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (e^{-2})^k = 2e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2})^k = 2e^{-2} \frac{1}{1-e^{-2}} = \frac{2}{e^2 - 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \geq 0$ donc la suite $(v_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} w_k\right)$ est croissante. Elle admet une limite l d'après le théorème de la limite monotone.

Les inégalités larges passent à la limite, donc de (*) on tire $l \leq \frac{2}{e^2-1}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = (n+1 - S_{n+1}) - (n - S_n) = 1 + S_n - S_{n+1} = 1 - \mathrm{th}(n+1) = w_{n+1} = \frac{2e^{-2(n+1)}}{1+e^{-2(n+1)}} \underset{n\to\infty}{\sim} 2e^{-2(n+1)}$

car $e^{-2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $1 + e^{-2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

donc $v_{n+1} - v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{e^2} (e^{-2})^n$ qui ne change pas de signe, et est le terme général d'une série géométrique convergente.

D'après le théorème de sommations des équivalents, $\sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{e^2} (e^{-2})^k$

d'où $l - v_n = \sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{e^2} \sum_{k=n}^{\infty} (e^{-2})^k \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{e^2} \left(\frac{e^{-2n}}{1-e^{-2}} \right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{e^2-1} e^{-2n}$

En effet, si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n}{1-q}$

Donc $l - v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{e^2-1} \cdot \frac{1}{e^{2n}}$

Télescope ⇒ Larrière

$\sum_{k=n}^{N} (v_{k+1} - v_k) = v_{N+1} - v_n \xrightarrow[N\to\infty]{} l - v_n$