Exercice 2

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 1$. La fonction $t \mapsto t^x$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $[n;n+1]$,
donc pour tout $t \in [n;n+1]$, $n^x \leq t^x \leq (n+1)^x$. Or $n^x > 0$,
d'où $-\frac{1}{n^x} \leq \frac{-1}{t^x} \leq -\frac{1}{(n+1)^x}$ d'où $0 \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$

Par croissance de l'intégrale, $0 \leq \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right) dt \leq \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) dt$

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{t^{x+1}}\,dt = \left[\frac{-1}{t^x}\right]_n^{n+1} = \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right) dt$$

d'où $0 \leq f_n(x) \leq \int_n^{n+1} \frac{x\,dt}{t^{x+1}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $x \in [1;2]$ et $t \in [n;n+1]$, ~~$0 < t < t^{x+1}$ car $t \geq n \geq 1 > 0$~~
$0 < t^2 \leq t^{x+1}$ par croissance de $u \mapsto t^u$ sur $[1;+\infty[$, donc sur $[2;3]$
donc $0 < \frac{1}{t^{x+1}} \leq \frac{1}{t^2}$ d'où $0 < \frac{x}{t^{x+1}} \leq \frac{2}{t^2}$
Par croissance de l'intégrale, $\int_n^{n+1} \frac{x\,dt}{t^{x+1}} \leq 2\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$

Donc $0 \leq f_n(x) \leq 2\left[\frac{-1}{t}\right]_n^{n+1} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\,\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{2}{n^2}$

D'où : $\forall x \in [1;2]$, $|f_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$ qui est un majorant de la fonction $|f_n|$ et est le terme général d'une série convergente.
Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[1;2]$.

c) La convergence normale prouvée en b) implique la convergence uniforme sur le segment $[1;2]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^x \xrightarrow[x \to 1^+]{} n$ (car $n^x = e^{x \ln n}$, et par continuité de exp)

$$\text{et } \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_n^{n+1} = \frac{e^{(1-x)\ln(n+1)} - e^{(1-x)\ln n}}{1-x}$$

$$= \frac{1 + (1-x)\ln(n+1) - (1 + (1-x)\ln n) + \underset{x \to 1^+}{o}(1-x)}{1-x}$$

$$= \ln(n+1) - \ln n + \underset{x \to 1^+}{o}(1)$$

$$\xrightarrow[x \to 1^+]{} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

donc $f_n(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = u_n$

D'après le théorème de la double limite, la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Or $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \frac{(n+1)^{1-x} - 1}{1-x} \xrightarrow[n \to \infty]{} \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ pour $x > 1$

Par unicité de la limite, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$

Et $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - (\ln(n+1) - \ln 1) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$= \gamma + o(1) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma$ d'où $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \gamma$

Donc $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x \to 1^+]{} \gamma$

Merci à Romain Lelaidier