Exercice 3

Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$. Merci à Romain Lelaidier

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : t \mapsto (\tan t)^n$ est continue sur $[0;\frac{\pi}{4}]$ et la fonction $\varphi : u \mapsto \operatorname{Arctan} u$ est de classe $C^1$ sur $[0;1]$, à valeurs dans $[0;\frac{\pi}{4}]$.

  D'après le théorème du changement de variables, $\int_0^1 f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t)\,dt$.

  Donc $u_n = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t)\,dt = \int_0^1 u^n \cdot \frac{1}{1+u^2}\,du$

  Pour tout $u \in [0;1]$, $0 < 1+u^2 \leq 2$ donc $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+u^2}$ donc $\frac{u^n}{2} \leq \frac{u^n}{1+u^2}$ car $u^n \geq 0$

  Par croissance de l'intégrale, $u_n \geq \int_0^1 \frac{u^n}{2}\,du = \frac{1}{2(n+1)}$

  Or $\frac{1}{2(n+1)} > 0$ et la série $\sum \frac{1}{2(n+1)}$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge, donc $R \leq 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0;\frac{\pi}{4}]$, $0 \leq \tan t \leq 1$ par croissance de tan sur $[0;\frac{\pi}{4}]$ donc $0 \leq (\tan t)^{n+1} \leq (\tan t)^n$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
  La suite $(u_n)$ est décroissante, elle admet donc une limite $\ell$ par le théorème de la limite monotone.

  $$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)(\tan t)^n\,dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$
  $$= \int_0^{\pi/4} \tan'(t)(\tan t)^n\,dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  Or $u_n + u_{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\ell$ donc par unicité de la limite, $\ell = 0$.

  La suite $(u_n)$ tend vers $0$ en décroissant. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ converge. D'où $R \geq 1$.

- On en déduit : $R = 1$, et la série $\sum u_n x^n$ converge $\iff x \in [-1;1[$.

---

On peut calculer la somme. Fixons $x \in ]-1;1[$ et notons $f_n : [0;\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (x\tan t)^n$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;\frac{\pi}{4}]$, $|f_n(t)| = |x \tan t|^n \leq |x|^n$ car $0 \leq \tan t \leq 1$.

Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum |x|^n$ converge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0;\frac{\pi}{4}]$, et a fortiori uniformément sur ce segment. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, $\int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} f_n$.

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} (x \tan t)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/4} f_n = \int_0^{\pi/4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x\tan t)^n\right) dt$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x\tan t} \quad \text{car } |x \tan t| < 1, \text{ pour tout } t \in [0;\tfrac{\pi}{4}].$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1-xu} \cdot \frac{1}{1+u^2}\,du \quad \text{avec le changement de variable } u = \tan t$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1-xu} + \frac{xu}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right) du$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \left[-x \ln|1-xu| + \frac{x}{2}\ln|1+u^2| + \operatorname{Arctan}(u)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{1+x^2}\left(-x\ln|1-x| + \frac{x}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{4} + x \ln \frac{\sqrt{2}}{1-x}\right)$$

$\alpha$

et par continuité, d'après le théo. d'Abel radial,
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n (-1)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln 2}{4}$$