Merci à Félix

Fiche 1 Révisions

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, la propriété P_k :

P_k " $f_n \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^i n^{4i} e^{-n} \cos(n^2 x) & \text{si } k = 2i \\ (-1)^{i+1} n^{4i+2} e^{-n} \sin(n^2 x) & \text{si } k = 2i+1 \end{cases}$$

* $f_n \in \mathcal{C}^0$

et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(0)}(x) = f_n(x) = (-1)^0 n^0 e^{-n} \cos(n^2 x)$

* Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose P_k vraie.
La fonction $f_n^{(k)}$ est $\mathcal{C}^1$ d'après les théorèmes généraux et

- Si $k = 2i$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left((-1)^i n^{4i} e^{-n} \cos(n^2 x)\right)$$

$$= (-1)^{i+1} n^{4i+2} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

- Si $k = 2i+1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left((-1)^{i+1} n^{4i+2} e^{-n} \sin(n^2 x)\right.$$

$$= (-1)^{i+1} n^{4(i+1)} e^{-n} \cos(n^2 x)$$

Donc P_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$, $|f_n^{(k)}(x)| \leq e^{-n} n^{2k}$

Or la série numérique $\sum e^{-n} n^{2k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$

car $e^{-\frac{n}{2}} n^{2k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissance comparées

donc $e^{-n} n^{2k} = o(e^{-\frac{n}{2}})$, $e^{-\frac{n}{2}} \geq 0$

or la série géométrique $\sum (e^{-\frac{1}{2}})^n$ converge car $|e^{-\frac{1}{2}}| < 1$

Donc la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ CVN, donc CVU pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc CVS sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Donc la fonction } f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est bien définie et est de classe } \mathcal{C}^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ donc } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

car
$\forall$ { la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ CVU sur $\mathbb{R}$
$\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ CVS sur $\mathbb{R}$

Et de plus, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{4k} e^{-n} \cos(n^2 x) \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{4k+2} e^{-n} \sin(n^2 x) \end{aligned}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $a \neq 0$

x	0		$4k$		$+\infty$
y		↗		↘	
	0				0

$\forall n \in \mathbb{N}, \ n^{4k} e^{-n} \geq 0$

On a $|f^{(2k)}(0)| = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{4k} e^{-n}$

$\geq (2k)^{4k} e^{-2k}$

Donc $\left| \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right| = \frac{|f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} |x|^{2k}$

$\geq \frac{(2k)^{4k} e^{-2k}}{(2k)!} |x|^{2k}$

$\underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{(2k)^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} |x|^{2k}$

d'après la formule de Stirling car $|x| \neq 0$

$\underset{k \to +\infty}{\sim} e^{2k \ln(2k|x|) - \frac{1}{2} \ln(4\pi k)}$

car $|x| \neq 0$

Or $2k \ln(2k|x|) - \frac{1}{2} \ln(4\pi k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

par croissances comparées

Donc $\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}|x|^{2k}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

Donc la série numérique $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ diverge grossièrement

$\boxed{\text{Donc le rayon de convergence de la série de Taylor } \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \text{ est nul}}$