Colle 19 Intégrales à paramètre

CHEVEREAU Edwyn

Exercice 1. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$.
On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y = x$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Vérifier que $g(x) = xf(x)$ est solution de (E) et donner la solution générale sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que g est l'unique solution g de (E) telle que $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = 0$.
   Dans la suite, on pose $g(0) = 0$.
4. Montrer que g n'est pas une fonction polynomiale.
5. Montrer que g n'est pas une fonction rationnelle.

Solution **1.**

1. *Sans problème : Leibniz avec domination des dérivées successives sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *Solution particulière :* $x->xf(x)$. *On trouve :* $y(x) = xf(x) + k\exp(\frac{1}{x})$.
   Sinon : variation de la constante avec une intégrale entre 0 *et* x *(convergente) et on retombe sur* $x->xf(x)$ *après changement de variable* $u = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}$.
   Ou encore
   $$x^2g'(x) + g(x) = x^2\big(xf'(x) + f(x)\big) + xf(x)$$
   et on calcule
   $$x\int_0^{+\infty}\left(\frac{-x^2t}{(1+xt)^2} + \frac{(x+1)(1+xt)}{(1+xt)^2}\right)dt = x\int_0^{+\infty}\left(\frac{x+xt+1}{(1+xt)^2}\right)dt = x\left[\frac{-e^{-t}}{1+xt}\right]_0^{+\infty} = x$$
3. *On obtient* $k = 0$ *car* f *est continue en* 0 *et* $g : x->xf(x)$.
4. *Si* g *est polynomiale alors (comme* $g(0) = 0$*)* f *l'est. Ceci est contradictoire avec une étude de la limite de* f *en* $+\infty$ *: c'est* 0 *(par interversion ou majoration : décomposer l'intégrale en deux intégrales entre* 0 *et* 1 *puis* 1 *et* ∞ *et majorer séparément).*
   Plus simple, l'équation différentielle n'admet pas de solution polynomiale (facile).
5. *Si* g *est rationnelle :* $g = \frac{P}{Q}$ *avec* $P \wedge Q = 1$ *et* Q *non constant.*
   On remplace dans l'équation :
   $$(X^2P' + P - XQ)Q = X^2Q'P \iff X^2P'Q + PQ - X^2Q'P = XQ^2.$$
   Et on compte la multiplicité en 0 *(facile) avec pour* P $m \geq 1$, *car* $g(0) = 0$.
   Ou encore :... (Gauss) : il existe A *tel que* $(X^2P' + P - XQ) = AP$ *et* $X^2Q' = AQ$.
   On étudie A *avec la relation* $X^2Q' = AQ$ *:*
   -> $A(0) = 0$ *car* $Q(0) \neq 0$ *vu que* $P(0) = 0$ *et ils sont premiers entre eux.*
   -> $d(A) = 1$ *car* Q *non constant.*
   Donc $A = kX$ *puis* $XQ' = kQ$ *qui donne (limite en* 0*)* $k = 0$ *vu que :* $Q(0) \neq 0$.
   Donc Q' *est nul puis* Q *est constant : absurde.*

ARNOU Alex

Exercice 2. 1. Montrer que pour $x \geq 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)}\,dt$.

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$.

   En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

4. Montrer que $f'' - f$ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire l'expression de f en fonction de I.

5. En déduire la valeur de I.

Solution **2.** 1. *prolonger en* 0 *et* $O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ *en* $+\infty$

2. $\left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ *donc* $\mathcal{C}^1$.

   Mais on ne peut pas conclure sur la dérivée seconde (en $+\infty$ *:* $\sim \dfrac{1}{t}$*).*
   Il faut faire une IPP :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{\sin xt}{x(1+t^2)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2t\sin(xt)}{x(1+t^2)^2}\,dt$$

   $\left|\dfrac{t^2\cos(xt)}{\left(1+t^2\right)^2}\right| \leq \dfrac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$ *donc par produit* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$

3. *IPP*

4.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1}{x}f'(x) + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}t\cos(xt)dt \\ &= \frac{-1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) - xt\sin(xt)}{1+t^2}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

   donc

$$f''(x) - f(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}dt = -I$$

   $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + I$ *;* f *bornée sur* $\mathbb{R}^+$ *donc* $\alpha = 0$ *et par continuité de* f' *en* 0, $\beta = -\frac{\pi}{2}$.

5. f *continue en* 0 *donc* $0 = f(0) = -\dfrac{\pi}{2} + I$

BACHELIER Lorca

Exercice 3. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt.$

1. Étudier l'existence et la dérivabilité de f.
2. On pose $f(1) = a$. Trouver une expression simple de $f(x)$ qui dépend de a.
3. Calculer a (on pourra poser $t = \tan u$).

Solution **3.**

1. *On applique la formule de Leibniz :*

   1/ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_x(t = \dfrac{\ln(t^2 + x^2)}{t^2 + 1}$ *est continue.*
   De plus, si $x \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{t\to} \varphi(t) = \ln x^2$, *sinon* $\varphi_0 \sim_0 2 \ln t$.
   En $+\infty$, $\varphi_x(t) \sim_{+\infty} \frac{2 \ln t}{t^2}$ *et donc* $\varphi(x) =_{+\infty} o(\frac{1}{t^{3/2}})$.
   On en déduit que f *est bien définie qur* $\mathbb{R}$.
   2/ On calcule $\dfrac{d\varphi_x(t)}{dx} = \dfrac{2x}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)}$ *qui est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
   3/ Pour tout $x \in [a; A]$ *avec* $a > 0$, *on a* $\left|\dfrac{d\varphi_x(t)}{dx}\right| \leq \dfrac{2A}{a(t^2 + 1)}$ *qui est intégrable.*
   Conclusion : f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)} dt$.

2. *On calcule* $f'(x)$ *: pour* $x > 0$ *et* $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)} = \frac{2x}{x^2 - 1} \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + x^2} \right),$$

   d'où $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2x} \right) = \dfrac{\pi}{x + 1}$, *relation encore valable pour* $x = 1$ *car* f *est* $\mathcal{C}^1$.
   On en déduit que pour $x > 0$, $f(x) = \pi \ln(x + 1) - \pi \ln 2 + f(1)$.
   Il reste à calculer $f(1)$ *: on pose* $t = \tan u$ *:*

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + t^2)}{t^2 + 1} dt = -\int_0^{\pi/2} \ln \cos^2 u du = -\int_0^{\pi/2} \ln \sin^2 u du.$$

   Et donc

$$2f(1) = -\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 u \sin^2 u) du = -\int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{4} \sin^2 2u \right) du = \frac{\pi}{2} \ln 4 - \int_0^{\pi} \ln \left(\sin^2 w \right) du$$

   où l'on a posé $w = 2u$ *et comme* $\sin(\pi - w) = \sin w$, *on en déduit* $2f(1) = \pi \ln 2 + f(1)$.
   on obtient ainsi : $f(x) = \pi \ln(x + 1)$. *On calcule* $f(0)$ *en posant* $t = \frac{1}{u}$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln t}{t^2 + 1} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{2 \ln(\frac{1}{u})}{\frac{1}{u^2} + 1} \left(\frac{-1}{u^2} \right) du = -\int_0^{+\infty} \frac{2 \ln u}{u^2 + 1} dt = -f(0),$$

   d'où $f(0) = 0$, $f(x) = \pi \ln(1 + |x|)$ *(car* f *est paire).*

XXX

<u>**Exercice 4.**</u> Evaluate $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx$.

Hint : $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(ax+1)dx}{x^2+1}$

Solution **4.** *Let* $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(ax+1)dx}{x^2+1}$.
Differentiating under the integral sign, we get

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^1 \frac{xdx}{(ax+1)(x^2+1)} \\ &= -\frac{\ln(a+1)}{a^2+1} + \frac{\ln 2}{2(a^2+1)} + \frac{\pi a}{4(a^2+1)} \end{aligned}$$

By integrating over $[0,1]$ *and using the fundamental theorem of calculus, we get*

$$I(1) - I(0) = -I(1) + \frac{\pi \ln 2}{4}$$

Obviously $I(0) = 0$*, so that*

$$I(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2$$