Feuille de T.D. n° 14

Couples de variables aléatoires

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Montrer que la probabilité de l'événement $(X = Y)$ vaut $\dfrac{p_1p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2}$.

Exercice 2 (Oral Mines Ponts PC 2016)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \ldots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne, Y la variable aléatoire donnant le numéro de la boule choisie.

1. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y) et montrer que l'espérance de Y vaut $\frac{n+3}{4}$.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (d'après Banque PT, 2015 A)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est :

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 \quad \text{si } 0 \leq i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées telles que $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Montrer que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
3. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Soit $Z = X - Y$. Montrer que la variable aléatoire Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
5. Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $p_n \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X_n telle que $P(X_n = 1) = p_n$ et $P(X_n = 0) = 1 - p_n$. On suppose que ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes.

1. Calculer l'espérance et la variance de la *v.a.* $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et montrer que cette variance est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{4n}$.
2. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Exercice 5. Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $p \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les valeurs prises par la v.a. X sont affichées par un compteur un tantinet déréglé :

— si la v.a. X prend une valeur non nulle, alors il affiche correctement cette valeur ;

— si la v.a. X prend la valeur 0, alors il affiche au hasard et de manière équiprobable une valeur de $[\![1, n]\!]$.

Soit Y la v.a. prenant la valeur affichée par le compteur.

1. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
2. Montrer que les v.a. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $n = 1$
3. Déterminer l'espérance de Y et l'espérance de XY.
4. En déduire la covariance de (X, Y). Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de $p \in]0, 1[$ qui la rendent nulle.

Rappel — Comme mentionné à la fin du thème n° 1 de révisions, la ▷ **partie III.A,B,C&D du sujet Centrale-Supélec Maths 2 PC 2018** explore le lien entre la fonction ζ, l'arithmétique et les probabilités. Les q.22&23 utilisent les intégrales à paramètre ▷ **XIII** puis les q.29 à 35 les couples de v.a. ▷ **XIV** (à noter qu'on disait « mutuellement indépendant(e)s » et qu'on dit désormais « indépendant(e)s » dans le nouveau programme.