Corrigé de la feuille de T.D. n° 14

Couples de variables aléatoires

6 mars 2025

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Montrer que la probabilité de l'événement $(X = Y)$ vaut $\dfrac{p_1p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2}$.

X et Y suivent des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2, d'où $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p_1)^{k-1}p_1 \quad \text{et} \quad P(Y = k) = (1 - p_2)^{k-1}p_2.$$

L'événement $(X = Y)$ est égal à $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (X = k \cap Y = k)$ et cette union est disjointe, donc

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p_1p_2 \left[(1 - p_1)(1 - p_2)\right]^{k-1} \quad \text{car les v.a. } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes par hypothèse} \\ &= p_1p_2 \cdot \frac{1}{1 - [(1 - p_1)(1 - p_2)]} = \frac{p_1p_2}{p_1 + p_2 - p_1p_2} \end{aligned}$$

Exercice 2 (Oral Mines Ponts PC 2016)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \ldots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne, Y la variable aléatoire donnant le numéro de la boule choisie.

1. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y) et montrer que l'espérance de Y vaut $\frac{n+3}{4}$.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

---

1. L'ensemble des valeurs prises par (X, Y) est $(X, Y)(\Omega) = \{(k, i) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n\}$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$:
$$\mathbb{P}(X = k, Y = i) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{k}$$
car, par équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{k}$.. On en déduit la loi marginale de Y : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(Y = i) = \displaystyle\bigcup_{k\in[\![i,n]\!]} (X = k \cap Y = i)$ et cette union est disjointe, d'où
$$\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k}$$
et la variable aléatoire Y est d'espérance finie car $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ est un ensemble fini ▷ **Remarque X.18**. De plus,
$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} i \times \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{nk}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (k + 1) = \frac{n+3}{4}\cdot$$
2. Si $n = 1$, alors les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes. Sinon, elles ne le sont pas car
$$\mathbb{P}(X = n, Y = 1) = \frac{1}{n^2} \quad \text{diffère de} \quad \mathbb{P}(X = n) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 3 (d'après Banque PT, 2015 A)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est :

$$P(X=i, Y=j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 \ \text{ si } 0 \leq i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées telles que $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Montrer que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
3. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Soit $Z = X - Y$. Montrer que la variable aléatoire Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
5. Montrer que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

---

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{j=0}^{i} P(X=i, Y=j) \qquad \text{car } P(X=i, Y=j) = 0 \text{ si } i < j \\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\ &= \frac{\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \frac{i! \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\ &= \frac{\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda}}{i!} \qquad \text{car } [\alpha + (1-\alpha)]^i = 1. \end{aligned}$$

   Donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$.

2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=j}^{\infty} P(X=i, Y=j) \qquad \text{car } P(X=i, Y=j) = 0 \text{ si } i < j \\ &= \frac{\alpha^j \mathrm{e}^{-\lambda}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+j} (1-\alpha)^k}{k!} \\ &= \frac{\alpha^j \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-\alpha)]^k}{k!} \\ &= \frac{\alpha^j \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda(1-\alpha)} \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha\lambda} \frac{(\alpha\lambda)^j}{j!}. \end{aligned}$$

   Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha\lambda)$.

3. Les v.a. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $\quad \forall i, \ \forall j, \quad P(X=i, Y=j) = P(X=i) \times P(Y=j)$. Un contre-exemple suffit pour montrer qu'elles ne sont pas indépendantes, le voici :

$$P(X=0, Y=0) = \mathrm{e}^{-\lambda} \quad , \qquad P(X=0) = \mathrm{e}^{-\lambda} \quad \text{et} \quad \times P(Y=0) = \mathrm{e}^{-\alpha\lambda},$$

   d'où $P(X=0, Y=0) \neq P(X=0) \times P(Y=0)$.

4. $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \sum_{i-j=k} P(X=i, Y=j)\\
&= \frac{(1-\alpha)^k}{k!}\sum_{i-j=k}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}\\
&= \frac{(1-\alpha)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i-j=k}\frac{\lambda^i\alpha^j}{j!}\\
&= \frac{(1-\alpha)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j+k}\alpha^j}{j!}\\
&= \frac{(1-\alpha)^k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda\alpha)^j}{j!}\\
&= \frac{[(1-\alpha)\lambda]^k}{k!}e^{-(1-\alpha)\lambda}
\end{aligned}$$

Donc $Z\hookrightarrow\mathcal{P}((1-\alpha)\lambda)$.

5. Soit $(j,k)\in\mathbb{N}^2$: l'événement $(Y=j)\cap(Z=k)$ est égal à $(X=j+k)\cap(Y=j)$,
d'où $P(Y=j,Z=k)=P(X=j+k,Y=j)=\dfrac{\lambda^{j+k}e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^k}{j!k!}$ par définition de la loi conjointe car $j\leq j+k$.
Par ailleurs, $\begin{cases} P(Y=j)=e^{-\alpha\lambda}\dfrac{(\alpha\lambda)^j}{j!} & \text{d'après la question 2}\\ P(Z=k)=\dfrac{[(1-\alpha)\lambda]^k}{k!}e^{-(1-\alpha)\lambda} & \text{d'après la question 4}\end{cases}$
D'où $P(Y=j,Z=k)=P(Y=j)\times P(z=k)$ et c'est vrai pour tout $(j,k)\in\mathbb{N}^2$, donc les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Exercice 4.

Soient, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, un réel $p_n\in]0,1[$ et une variable aléatoire X_n telle que $P(X_n=1)=p_n$ et $P(X_n=0)=1-p_n$. On suppose que ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes.

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ et montrer que cette variance est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{4n}$.
2. En déduire que :

$$\forall\varepsilon>0,\qquad \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

---

1. Les variables aléatoires X_n sont bornées et il en est donc de même de la variable aléatoire Z_n^2 qui possède donc une espérance ▷ **Remarque X.18**. La v.a. Z_n possède donc une espérance et une variance ▷ **Proposition-définition X.26**. Pour chaque $k\in[\![0,n]\!]$, $E(X_k)=0\times P(X_k=0)+1\times P(X_k=1)=p_k$ et
$V(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=0^2\times P(X=0)+1^2\times P(X=1)-[E(X_k)]^2=p_k-p_k^2=p_k\cdot(1-p_k)$. D'où

$$\begin{aligned}
E(Z_n) &= \frac{E(X_1)+\cdots+E(X_n)}{n} && \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= \frac{V(X_1+\cdots+X_n)}{n^2}\\
&= \frac{V(X_1)+\cdots+V(X_n)}{n^2} && \text{car les v.a. } X_1,\cdots,X_n \text{ sont deux à deux indépendantes}\\
&= \frac{p_1(1-p_1)+\cdots+p_n(1-p_n)}{n^2}\\
&\leq \frac{\frac14+\cdots+\frac14}{n^2}\\
&\leq \frac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$: d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\left(|Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$, d'où

$$1 \geq 1 - P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Exercice 5. Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $p \in]0,1[$ et une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Les valeurs prises par la v.a. X sont affichées par un compteur un tantinet déréglé :

— si la v.a. X prend une valeur non nulle, alors il affiche correctement cette valeur ;

— si la v.a. X prend la valeur 0, alors il affiche au hasard et de manière équiprobable une valeur de $[\![1,n]\!]$.

Soit Y la v.a. prenant la valeur affichée par le compteur.

1. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
2. Montrer que les v.a. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $n = 1$
3. Déterminer l'espérance de Y et l'espérance de XY.
4. En déduire la covariance de (X,Y). Déterminer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de $p \in]0,1[$ qui la rendent nulle.

---

1. Pour connaître la loi marginale de Y, on peut calculer la loi conjointe du couple (X,Y), c'est-à-dire $P(X=j, Y=k)$ pour chaque $(j,k) \in [\![0,n]\!] \times [\![1,n]\!]$. Pour simplifier, on peut se contenter de calculer d'une part :

$$P(X=0, Y=k) = P((X=0) \cap (Y=k)) = P(X=0) \cdot P_{(X=0)}(Y=k) = (1-p)^n \cdot \frac{1}{n}$$

d'après la formule des probabilités composées. Et de remarquer d'autre part que l'événement $(X \neq 0) \cap (Y=k)$ est égal à $(X=k)$, d'où :

$$P((X \neq 0) \cap (Y=k)) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

car $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Enfin l'événement $(Y=k)$ est l'union disjointe des événements $(X=0) \cap (Y=k)$ et $(X \neq 0) \cap (Y=k)$, donc :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1,n]\!], \qquad P(Y=k) &= P((X=0) \cap (Y=k)) + P((X \neq 0) \cap (Y=k)) \\ &= (1-p)^n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Si $n \geq 2$, alors on veut montrer que :

$$\exists (j,k) \in [\![0,n]\!] \times [\![1,n]\!], \quad P(X=i, Y=j) \neq P(X=i) \cdot P(Y=j).$$

Effectivement : $P(X=n, Y=1) = 0$ (car l'événement est impossible) tandis que ni $P(X=n)$ ni $P(Y=0)$ n'est nul. Donc les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes.
Par contre, si $n = 1$, alors on vérifie d'une part que :
$1 - p = P(X=0, Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=0)$ car $P(X=0) = 1-p$ et $P(Y=1) = 1$.
Et d'autre part que :
$p = P(X=1, Y=1) = (X=1) \cdot P(Y=1)$ car $P(X=1) = p$ et $P(Y=1) = 1$.

3. La v.a. Y possède une espérance car $Y(\Omega)$ est fini :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{car le terme } k=0 \text{ ne contribue pas à la somme} \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot (1-p)^n + E(X) \quad \text{car la deuxième somme est l'espérance de } X \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot (1-p)^n + np \quad \text{car } X \text{ suit une loi binomiale.} \end{aligned}$$

De même, la v.a. XY possède une espérance car $XY(\Omega)$ est fini :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} jkP(X=j, Y=k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} jkP(X=j, Y=k) \quad \text{car le terme } j=0 \text{ ne contribue pas à la somme} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) \quad \text{car, pour tout } j \neq 0,\ (X=j)\cap(Y=k) = \begin{cases} \varnothing \text{ si } j \neq k \\ (X=k) \text{ si } j=k \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) \quad \text{car le terme } k=0 \text{ ne contribue pas à la somme} \\
&= E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = np(1-p) + (np)^2 \text{ car } X \text{ suit une loi binomiale.}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= V(X) + [E(X)]^2 - E(X)\cdot\left[\frac{n+1}{2}\cdot(1-p)^n + E(X)\right] \\
&= np(1-p) - np\frac{n+1}{2}\cdot(1-p)^n.
\end{aligned}$$

Si $n=1$, alors les v.a. sont indépendantes, ce qui implique qu'elles sont décorrélées ▷ **Théorème XV.11**. Donc $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ pour tout $p \in]0,1[$. L'expression de la covariance trouvée à la question précédente le confirme.
Si $n>1$, alors les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes mais ça n'implique pas qu'elles sont décorrélées :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \iff 1-p = \exp\frac{\ln(2)-\ln(n+1)}{n-1} \text{ qui est bien dans }]0,1[.$$