

Variables aléatoires

1 Variables aléatoires, espérance

Exercice 1. ♡* Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, \dots, n, \dots$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres, et que $\mathbb{P}(n\text{-ième saut}) = \frac{1}{n}$.

Soit X le dernier saut réussi. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$.

Solution 1. . Si $X_i = 1$ si le i -ème saut est réussi et 0 sinon, alors

$$(X = k) = \bigcap_{i=1}^k (X_i = 1) \cap (X_{k+1} = 0)$$

Comme les sauts sont indépendants, les événements $(X_i = 0)$ sont mutuellement indépendants et

$$\mathbb{P}(X = k) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

On peut calculer la fonction génératrice G_X de X :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!} s^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{(k+1)!} s^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} s^k \\ &= (e^s - 1) - \frac{1}{s}(e^s - 1 - s) \\ &= \left(1 - \frac{1}{s}\right)e^s + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

On calcule $G'_X(s) = \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^s - \frac{1}{s^2}$. Donc l'espérance existe et vaut $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = e - 1$.

De même, la variance existe et vaut $\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = 3e - e^2$.

Exercice 2. ** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On définit une fonction Y par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

Solution 2. .

1. Y est à valeurs discrète car $Y(\Omega) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X(\Omega)$ et est donc au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

2. Pour tout $y \in E$,

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{y\}) &= \{\omega \in \Omega \mid X_{N(\omega)}(\omega) = y\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) = y\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left((N = n) \cup (X_n = y) \right) \end{aligned}$$

Par stabilité d'une tribu par union et intersection dénombrable, $Y^{-1}(\{y\})$ appartient bien à la tribu \mathcal{T} .

Exercice 3. ♡♡** Soit T une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(T > n) > 0.$$

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geq n).$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.

1. Justifier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0, 1[.$$

2. Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la probabilité $\mathbb{P}(T \geq n)$.

En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.

3. Inversement, soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0, 1[$ et $\sum \theta_n$ diverge. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T .

Solution 3. .

1. Par définition d'une probabilité, $\theta_n \in [0, 1]$.

Si pour $n_0 \in \mathbb{N}$, $\theta_{n_0} = 1 = \mathbb{P}(T = n_0 \mid T \geq n_0)$, alors $\mathbb{P}(T = n_0) = \mathbb{P}(T \geq n_0)$ et donc $\mathbb{P}(T > n_0) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

2. On a $\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T \geq n + 1)$ et $\mathbb{P}(T = n) = \theta_n \mathbb{P}(T \geq n)$.

Donc

$$\mathbb{P}(T \geq n + 1) = (1 - \theta_n) \mathbb{P}(T \geq n) \implies \mathbb{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) \mathbb{P}(T \geq 0)$$

Comme T est à valeur dans \mathbb{N} , on a $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$, d'où

$$\mathbb{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

Par limite décroissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \theta_k)$ tend vers $-\infty$.

Soit (θ_n) ne tend pas vers 0, et alors la série $\sum \ln(1 - \theta_n)$ diverge grossièrement et donc tend vers $-\infty$, soit (θ_n) tend vers 0, mais alors $\ln(1 - \theta_n) \sim -\theta_n$ et par comparaison entre suite de signe constant, $\sum \theta_n$ tend encore vers $+\infty$, comme série divergente à termes positifs.

3. S'il existe une telle variable aléatoire T , d'après ce qui précède,

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n + 1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

Il faut montrer que $\sum_n \mathbb{P}(T = n) = 1$ et que $\mathbb{P}(T = n) = \theta_n \mathbb{P}(T \geq n)$.

(a) On montre par récurrence que

$$\mathbb{P}(T \leq n) = 1 - \prod_{k=0}^n (1 - \theta_k)$$

Comme dans la question précédente, la divergence de $\sum_n \theta_n$ implique que $\prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \theta_k) = 0$.

(b) L'événement complémentaire donne le seconde point.

Exercice 4. On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Solution 4. . 1. Soit X le nombre de piles obtenus au cours de 10 lancers. X est le nombre de réalisations de l'événement "le lancer donne pile" de probabilité constante 0,3 au cours de 10 lancers indépendants. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. On en déduit : $P(X = 3) = \binom{10}{3} (0,3)^3 (1 - 0,3)^{10-3} \simeq 0,27$.

2. Soit Y le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention de pile pour la première fois. Y est le temps d'attente de la première réalisation de l'événement "obtenir pile" de probabilité constante 0,3 lors d'une suite de lancers indépendants, donc Y suit une loi géométrique de paramètre 0,3. On en déduit, en appliquant la formule du cours du calcul de l'espérance d'une loi géométrique

$$E(Y) = \frac{1}{0,3} = \frac{3}{10}.$$

Exercice 5. **

1. Soit une variable X de loi hypergéométrique de paramètres (N, N_1, n) qui correspond à la modélisation : je choisis successivement n boules parmi N dont N_1 boules noires et $N - N_1$ boules blanches et X compte le nombre de boules noires :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n! \binom{N_1}{k} \binom{N - N_1}{n - k}}{n! \binom{N}{n}} = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N - N_1}{n - k}}{\binom{N}{n}}.$$

Soit E_k l'évènement "La k -ième boule est noire", c'est-à-dire on tient compte de l'ordre. Alors

$$X = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}$$

Calculer l'espérance de la loi X (il existe une version courte suggérée ici et une version calculatoire).

2. À l'ouverture, le rayon boulangerie d'un magasin en libre service contient cent baguettes dont x seulement sont fraîches, les autres étant l'invendu de la veille.
 - (a) Le premier client C de la journée choisit au hasard k baguettes. Quelle est la probabilité $p_k(m)$ que m d'entre elles soient fraîches ?
 - (b) Si le client C n'est pas le premier client de la journée et si n baguettes ($n \leq 100 - k$) ont déjà été achetées (toutes choisies au hasard) avant son arrivée, qu'est devenue la probabilité $p_k(m)$?
 - (c) Les clients du magasin ne connaissent évidemment pas le nombre x (ils le supposent nul!). En fait, ce nombre est aléatoire : il dépend chaque jour du nombre aléatoire de baguettes vendues la veille. Pour tout entier i de $[1, 100]$, on note A_i l'évènement : i des 100 baguettes que contient le rayon à l'ouverture sont fraîches. Montrer que la probabilité $p_1(0)$ d'avoir du pain rassis quand on achète une seule baguette ne dépend des $\mathbb{P}(A_i)$ qu'au travers du nombre

$$m_1 = \sum_{i=1}^{100} i \mathbb{P}(A_i)$$

Solution 5. .

$$1. \text{ On a } \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_k}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E_k).$$

Or, pour tout k , $\mathbb{P}(E_k) = \frac{N_1}{N}$: en effet chaque boule a une chance équiprobable d'être choisie au k -ème tirage.

Pour s'en convaincre, comprendre que $\mathbb{P}(E_1)$ est la probabilité d'avoir une boule noire au premier tirage, donc $\mathbb{P}(E_1) = \frac{N_1}{N}$. Puis, par récurrence sur N et N_1

$$\mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(E_k|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_k|\bar{E}_1)\mathbb{P}(\bar{E}_1) = \frac{N_1-1}{N-1} \times \frac{N_1}{N} + \frac{N_1}{N-1} \times \frac{N-N_1}{N} = \frac{N_1}{N}.$$

On en déduit

$$\mathbb{E}(X) = n \frac{N_1}{N}$$

Nous avons vu que si $N \rightarrow +\infty$ et si $\frac{N_1}{N}$ tend vers p , alors la loi hypergéométrique tend vers une loi binomiale de paramètres (n, p) , on retrouve la même espérance !

On trouvera dans littérature une loi hypergéométrique de paramètre (N, p, q) avec $N_1 = pN$ et $N - N_1 = qN$.

2.

(a) La loi de p_k est une loi hypergéométrique

$$p_k(m) = \frac{\binom{x}{m} \binom{100-x}{k-m}}{\binom{100}{k}}$$

(b) Comme dans la question 1, on pose E_i l'évènement la i -ème baguette achetée est fraîche. Si n baguettes ont déjà été achetées, alors

$$X = \sum_{i=n+1}^{n+k} \mathbb{1}_{E_i}$$

et donc la loi ne change pas.

(c) On pose B l'évènement "J'achète une baguette fraîche".

$$\mathbb{P}(B|A_i) = \frac{i}{100}$$

et la formule de probabilité totale donne

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} i\mathbb{P}(A_i)$$

L'évènement contraire est de probabilité $1 - \mathbb{P}(B)$ qui ne dépend que de m_1 , l'espérance du nombre de baguette produite par jour.

Exercice 6. * Montrer qu'à toute suite décroissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, on peut associer une unique loi de probabilité \mathbb{P} sur \mathbb{N} telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \frac{a_n}{a_0}.$$

Solution 6. . Si une telle loi existe, on a alors, pour $n \geq 0$

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) - \mathbb{P}(\{n+1, \dots\}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$$

ce qui est un nombre positif. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0} = \frac{a_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{a_0} = 1,$$

puisque la somme est télescopique.

On a donc bien obtenu une loi de probabilité sur \mathbb{N} , et c'est la seule possible.

Inversement si une loi de probabilité sur \mathbb{N} est définie par

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$$

on a bien

$$\mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \sum_{k \geq n} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_0} = \frac{a_n}{a_0}.$$

Exercice 7. * On sait que si X est une variable aléatoire réelle et si ϕ est une fonction affine, $\mathbb{E}(\phi(X)) = \phi(\mathbb{E}(X))$.

A quelle condition sur la loi de probabilité de X cette égalité reste-t'elle vraie si ϕ est la fonction définie par $\phi(x) = x^2$?

Solution 7. . On a $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

La relation $\mathbb{E}(\phi(X)) = \phi(\mathbb{E}(X))$, est donc équivalente à

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0.$$

Cela signifie que $\mathbb{P}(X \neq \mathbb{E}(X)) = 0$, c'est-à-dire que X est constante presque sûrement.

2 Vecteurs aléatoires

Exercice 8. ♡* On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X . En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

Solution 8. .

1. Pour $i = 1, \dots, 6$, l'événement $X = i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :

- $A : U_1 = i$ et $U_2 = i$;
- $B : U_1 = i$ et $U_2 > i$;
- $C : U_1 > i$ et $U_2 = i$.

Par indépendance des variables aléatoires U_1 et U_2 , on en déduit que

$$P(A) = \frac{1}{36}, P(B) = \frac{6-i}{36} \text{ et } P(C) = \frac{6-i}{36}.$$

Il vient $P(X = 1) = 11/36$, $P(X = 2) = 9/36$, $P(X = 3) = 7/36$, $P(X = 4) = 5/36$, $P(X = 5) = 3/36$, $P(X = 6) = 1/36$. On en déduit $E(X) = 91/36$.

2. On a $X + Y = U_1 + U_2$ car (U_1, U_2) est une permutation de (X, Y) . Il vient $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = E(U_1) + E(U_2) = 7$, puisque chaque U_i suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$, son espérance vaut $(6 + 1)/2 = 7/2$. On en déduit $E(Y) = 161/36$.
3. On a $XY = U_1 U_2$. On en déduit

$$E(XY) = E(U_1 U_2) = E(U_1)E(U_2)$$

par indépendance de ces deux variables aléatoires. D'où

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1225}{1296}.$$

Exercice 9. ♡* On a n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans la boîte. Soit X le numéro de la boîte, et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Solution 9. .

1. Remarquons d'abord que (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}^2$. En outre :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j|X = i).$$

On a donc :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

2. Y est une loi marginale du couple (X, Y) . On a donc :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^n P((X = i) \cap (Y = j)).$$

On en déduit :

$$P(Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}.$$

Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Y) = \sum_{j=1}^n jP(Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j}{i}.$$

On permute les sommes. En cas de difficultés, il est conseillé de représenter les sommes sous forme d'un tableau (triangulaire). On obtient :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{j}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1) \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

3. Il est facile de vérifier que $P(Y = 2) \neq 0$, et bien sûr on a $P(X = 1) = \frac{1}{n} \neq 0$. On en déduit que

$$P(X = 1)P(Y = 2) \neq 0.$$

Or, on a prouvé que $P((X = 1), (Y = 2)) = 0$. Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

4. L'événement $(X = Y)$ est réalisé si, et seulement si, X et Y prennent les mêmes valeurs. On a donc :

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^n P((X = i), (Y = i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Exercice 10. ** On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p , où $p \in]0, 1[$. Si $n \geq 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le n -ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et $A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que A_1, \dots, A_n sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

Solution 10. .

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier pile; elle suit la loi géométrique de paramètre p , donc d'espérance $1/p$.
2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène pile. Les variables X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Soit $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. L'événement $(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n)$ s'écrit aussi :

$$X_1 = \dots = X_{i_1-1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = \dots = X_{i_1+i_2-1} = 0, X_{i_1+i_2} = 1, \dots, X_{i_1+\dots+i_n} = 1.$$

Donc, en posant $q = 1 - p$, on a :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = q^{i_1-1} p q^{i_2-1} p \dots q^{i_n-1} p.$$

En sommant pour (i_1, \dots, i_{n-1}) parcourant $(\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on a :

$$P(A_n = i_n) = q^{i_n-1} p.$$

(A_n) suit bien une loi géométrique de paramètre p . De plus l'expression ci-dessus prouve que :

$$P(A_1 = i_1, \dots, A_n = i_n) = P(A_1 = i_1) \dots P(A_n = i_n),$$

ce qui montre que les variables A_1, \dots, A_n sont indépendantes.

Exercice 11. ♡** Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 , définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{B}, P) , et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \dots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \dots, n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
2. Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1 .
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale?

Solution 11. . 1. On a $Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, et par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :

$$- \text{ si } k \leq a, P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) = \frac{1}{n} \times \frac{a}{n}.$$

$$- \text{ si } k > a, P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)) + P((X_2 = k) \cap (X_2 > a)) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}.$$

$$\text{On a bien } a \times \frac{a}{n^2} + (n - a) \times \left(\frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

2. Le calcul de l'espérance est facile :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^a k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^n k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^n \frac{k}{n} \\ &= \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n} \\ &= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) \geq E(X_1). \end{aligned}$$

3. On vérifie que :

$$E(Y) = \frac{1}{2n} \left(\frac{5}{4}n^2 + n - (a - n/2)^2 \right).$$

Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a - n/2|$ le plus petit possible :

- si n est pair, c'est pour $a = n/2$.
- si n est impair, c'est pour $a = (n - 1)/2$ ou $a = (n + 1)/2$.

Exercice 12. ♡* Soit $\alpha, \beta \in]0, 1[$ et

$$g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) \mapsto \alpha\beta(1 - \alpha)^i(1 - \beta)^j.$$

1. Vérifier que la loi $((i, j), g(i, j))$ définit une loi de probabilité sur \mathbb{N}^2 .
2. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire discrète définie sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N})^2, \mathbb{P})$ par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, X(i, j) = i, Y(i, j) = j.$$

Donner les lois de X et Y . Les identifier à des lois connues.

3. Calculer

- (a) $\mathbb{P}(X = Y)$,
- (b) $\mathbb{P}(X > Y)$.

4. Soit Z la variable aléatoire discrète définie sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N})^2, \mathbb{P})$ par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, Z(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont impairs} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer l'espérance de Z .

Solution 12. .

1. La somme sur i puis la somme sur j existent et donc la famille est sommable (à termes positifs). On obtient 1 (série géométrique).
2. $\mathbb{P}(X = i) = \alpha(1 - \alpha)^i$, on reconnaît une loi géométrique; de même pour Y .
3. Z est bornée donc intégrable et calcule la somme pour les i, j pairs :

$$\frac{1}{2 - \alpha)(2 - \beta)}$$

et sur les impairs

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) \frac{1}{2 - \alpha)(2 - \beta)}$$

d'où

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\alpha + \beta - \alpha\beta}{(2 - \alpha)(2 - \beta)}.$$

Exercice 13. ** Soit \mathbb{P} une probabilité sur un produit cartésien fini $\Omega' \times \Omega''$.

1. Montrer que si \mathbb{P} est l'équiprobabilité, les probabilités marginales \mathbb{P}' et \mathbb{P}'' de \mathbb{P} sont elles-mêmes des équiprobabilités.
2. Les probabilités \mathbb{P}' et \mathbb{P}'' peuvent-elles être des équiprobabilités sans que \mathbb{P} le soit ?

Solution 13. .

1. Si l'on a, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$,

$$\mathbb{P}(\{\omega'_i, \omega''_j\}) = \frac{1}{mn}$$

Alors la première loi marginale \mathbb{P}' est par définition

$$\mathbb{P}'(\{\omega'_i\}) = \mathbb{P}(\{\omega'_i\} \times \Omega'') = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\{\omega'_i, \omega''_j\}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{mn} = \frac{1}{m}$$

et la seconde loi marginale \mathbb{P}'' :

$$\mathbb{P}''(\{\omega''_j\}) = \mathbb{P}(\Omega' \times \{\omega''_j\}) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(\{\omega'_i, \omega''_j\}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{mn} = \frac{1}{n}$$

Les probabilités marginales sont bien des équiprobabilités.

2. La réponse est NON. Prenons $\Omega' = \Omega'' = \{1, 2\}$, et posons $\mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = t$.

On peut faire un tableau où $\mathbb{P}(\{(i, j)\})$ est dans la case (i, j) :

	1	2	\mathbb{P}'
1	t	x	$t + x$
2	y	z	$y + z$
\mathbb{P}''	$t + y$	$x + z$	\times

Si l'on veut que \mathbb{P}' et \mathbb{P}'' soient des équiprobabilités, on devra avoir

$$\mathbb{P}(\{(1, 1)\}) + \mathbb{P}(\{(1, 2)\}) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) + \mathbb{P}(\{(2, 1)\}) = \frac{1}{2}$$

donc $\mathbb{P}(\{(1, 2)\}) = x = \frac{1}{2} - t$ et $\mathbb{P}(\{(2, 1)\}) = y = \frac{1}{2} - t$, et alors

$$\mathbb{P}(\{(2, 2)\}) = z = \frac{1}{2} - \mathbb{P}(\{(1, 2)\}) = t.$$

Il suffit de choisir t dans $]0, 1/2[\setminus \{1/4\}$ pour avoir des probabilités marginales équiprobables, sans que \mathbb{P} le soit.

3 Lois conditionnelles, indépendance

Exercice 14. ♡* Soit $\{(x_i, p_i) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ le germe d'une loi de probabilité V . Montrer que si (X, Y) est un couple de variables indépendantes de loi V , alors

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i).$$

Solution 14. . Puisque les variables sont indépendantes et de même loi, on a

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = x_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = x_j) = p_i p_j.$$

Alors

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i, Y = x_i) = 1 - \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Mais comme

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

on a

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i).$$

Exercice 15. * Soit $(x_i, y_j), (x_k, y_l)$ deux valeurs probables (distinctes) d'un couple aléatoire (X, Y) . Montrer qu'il suffit que $\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_l)) = 0$ ou $\mathbb{P}((X, Y) = (x_k, y_j)) = 0$ pour que X et Y ne soient pas indépendantes.

Solution 15. . Par hypothèse $\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j))$ et $\mathbb{P}((X, Y) = (x_k, y_l))$ ne sont pas nuls. Supposons que $\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_l)) = 0$ et que X et Y sont indépendantes. Alors

$$\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_l)) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_l) = 0,$$

et un des deux nombres $\mathbb{P}(X = x_i), \mathbb{P}(Y = y_l)$ est nul. Mais alors

$$\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$$

et

$$\mathbb{P}((X, Y) = (x_k, y_l)) = \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}(Y = y_l),$$

et un de ces deux nombres est nul, d'où une contradiction. Donc X et Y ne sont pas indépendantes. Le raisonnement est analogue si c'est $\mathbb{P}((X, Y) = (x_k, y_j))$ qui est nul.

Exercice 16. ♡** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières naturelles paires qui suivent la même loi de probabilité telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = 2k) = (k + 1)\mathbb{P}(X = 2k + 2).$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle $Z = \frac{X + Y}{2}$.

Solution 16. . On déduit immédiatement de la relation

$$\mathbb{P}(X = 2k + 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 2k)}{k + 1} = \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{(k + 1)!}$$

si $k \geq 0$.

On écrit

$$G_X(s) = G_Y(s) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = 0) \frac{s^{2n}}{n!} = \mathbb{P}(X = 0)e^{s^2}$$

et comme $G_X(1) = 1$, on a $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-1}$.

Les variables étant indépendantes,

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{-2}e^{2s^2} = e^{-2} \sum_{n \geq 0} \frac{2^n s^{2n}}{n!}$$

Donc $\mathbb{P}(X + Y = 2n) = \frac{2^n}{n!}e^{-2}$ et donc

$$G_{(X+Y)/2} = e^{-2} \sum_{n \geq 0} \frac{2^n s^n}{n!} = e^{-2}e^{2s}$$

et on reconnaît une loi de Poisson de paramètre 2.

4 Divers

Exercice 17. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X^* , réduite d'une variable aléatoire réelle X de loi de Bernoulli de paramètre a .

Solution 17. . Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre a , on a $\mathbb{E}(X) = a$ et $\text{Var}(X) = a(1 - a)$.
Donc

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\text{Var } X}} = \frac{X - a}{\sqrt{a(1 - a)}}.$$

Lorsque $X = 1$, on a $X^* = \sqrt{\frac{1 - a}{a}} = \alpha$.

Lorsque $X = 0$, on a $X^* = \sqrt{\frac{a}{1 - a}} = \frac{1}{\alpha}$.

Donc $X^*(\Omega) = \{-1/\alpha, \alpha\}$,

et $\mathbb{P}(X^* = \alpha) = \mathbb{P}(X = 1) = a$ et $\mathbb{P}(X^* = -1/\alpha) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - a$.

Exercice 18. ♡* Calculer $\mathbb{P}(X < E(X))$ si X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X) = 2\text{Var}(X)$.

Solution 18. . Si X suit une loi binomiale de paramètres n et a , on sait que $\mathbb{E}(X) = na$ et $\text{Var}(X) = na(1 - a)$.

Donc l'égalité $\mathbb{E}(X) = 2\text{Var}(X)$ se traduit par

$$na = 2na(1 - a),$$

et donc $a = 1/2$ et $\mathbb{E}(X) = n/2$.

Comme $n/2$ n'est pas un entier, on écrit $n = 2\alpha + 1$.

On a ainsi

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{k=0}^{\alpha} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

En faisant le changement d'indice de sommation $j = n - k$, on a

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{j=n-\alpha}^n \frac{\binom{n}{n-j}}{2^n},$$

mais puisque $n - \alpha = \alpha + 1$,

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{j=n-\alpha}^n \frac{\binom{n}{j}}{2^n} = \mathbb{P}(X > n/2).$$

Puisque $\mathbb{P}(X = n/2)$ est nulle, on a

$$\mathbb{P}(X < n/2) + \mathbb{P}(X > n/2) = 1,$$

et on en déduit

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \frac{1}{2}$$

Exercice 19. *** Peut-on truquer deux dés (à six faces, marquées 1,2,...,6) de façon que la somme des points obtenus des deux lancers de ce dé suive une loi uniforme ?

On pourra s'intéresser aux fonctions génératrices.

Solution 19. . Soit X la variable indiquant le résultat du premier dé et Y du second dé. Posons $S = X + Y$.
Les variables X et Y sont supposées indépendantes, donc

$$G_S = G_X G_Y.$$

Par hypothèse, S prend des valeurs entre 2 et 12 et comme S est de loi uniforme

$$G_S(s) = \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{11} s^k = \frac{s^2}{11} \frac{1 - s^{11}}{1 - s} \quad (s \neq 1),$$

et $G_S(1) = 1$.

Mais $G_X(s) = sP(s)$ et $G_Y(s) = sP(s)$ sont des polynômes de degré au plus 6 de terme constant nul (car à valeur dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$). Mais alors

$$G_S = G_X G_Y \Rightarrow 11 \times (1-s)P(s)Q(s) = 1 - s^{11}$$

ce qui est impossible car $1 - s^{11}$ admet pour unique racine réelle la racine simple 1 et sinon a des racines complexes non réelles mais P et Q sont nécessairement de degré 5 et donc ont d'autres racines réelles.

Exercice 20. ♡** On décide de jouer à pile ou face jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat différent du précédent. Quel est le "nombre moyen" de lancers à effectuer ?

Solution 20. . Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués.

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

puisqu'il n'y a que 2 cas favorables que des piles puis un face ou des faces puis un pile.

Posons

$$g(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} s^n = \frac{s^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{s}{2}} = \frac{s^2}{2-s}$$

et donc

$$g'(s) = \frac{2s(2-s) + s^2}{(2-s)^2} = \frac{4s - s^2}{(2-s)^2}$$

et

$$\mathbb{E}(X) = g'(1) = 3.$$

Exercice 21. ♡ Soient $n, m \geq 1$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes avec $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, q)$. Montrer que $X + Y$ suit une loi binomiale si et seulement si $p = q$.

Solution 21. . \Rightarrow : La loi $X + Y$ est à valeurs dans $\llbracket 0, n + m \rrbracket$. Donc si elle suit une loi binomiale elle est de paramètre $\mathcal{B}(m + n, p')$ avec $p' \in [0, 1]$: $X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p')$.

Pour $t \in [-1, 1]$, on sait que : $G_{X+Y}(t) = (1 - p' + tp')^{n+m}$ or X et Y sont indépendantes, donc on a aussi que $G_{X+Y}(t) = (1 - p + tp)^n (1 - q + tq)^m$.

Ainsi,

$$\forall t \in [-1, 1], (1 - p' + tp')^{n+m} = (1 - p + tp)^n (1 - q + tq)^m.$$

Ces deux polynômes coïncident sur $[-1, 1]$, ensemble de cardinal infini, donc ils sont donc égaux

En particulier, ils admettent les mêmes racines. On en déduit $1 - \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, puis $p = q$. \Leftarrow : Si $p = q$ alors comme X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(t) = (1 - p + tp)^n (1 - q + tq)^m = (1 - p + pt)^{m+n}$ donc, comme une variable aléatoire est caractérisée par sa loi on a que $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Par double implication, l'équivalence est démontrée.

Exercice 22. ** Un joueur J , passionné de "Pile ou face", a trouvé un "pigeon" P qui accepte, à condition que J lui verse d'abord 5 euros, de jouer contre lui selon la règle suivante :

- à chaque partie, P devra miser la même somme que J et le gagnant de la partie empochera la mise des deux joueurs ;
- le nombre de parties n'est pas fixé à l'avance : le match durera jusqu'à ce que J décide de l'arrêter.

La tactique choisie par J est la suivante : il commence par jouer 10 euros sur pile. Si pile sort, il empochera les 20 euros et cessera de jouer. Sinon il aura perdu sa mise mais fera un nouveau pari sur pile en misant le double de sa mise précédente et ainsi de suite jusqu'à ce que pile sorte.

1. Quel est le nombre moyen de paris ?
2. Quelle est l'espérance de gain net de J ?
3. Quelle somme doit engager P ? Quelle somme doit pouvoir engager J ?
4. La fortune de J n'est pas infinie. Quelle est réellement l'espérance de gain de son gain ?

Solution 22.

1. Si l'on note la suite des résultats des parties, J s'arrête au bout de n parties lorsque l'on a $F F \dots F P$, où F est sortie $n - 1$ fois. On a donc

$$\mathbb{P}(FF \dots FP) = \frac{1}{2^n}$$

La variable aléatoire N donnant le nombre de parties vérifie donc, pour $n \geq 1$, $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$.
On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) = 1.$$

Donc la probabilité pour que le jeu s'éternise est nulle.

Par ailleurs

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2^n} = 2.$$

2. Le gain de J en euros est, dans le cas où n parties ont été effectuées,

$$G_J = 10 \left(2^n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \right) - 5 = 10(2^n - (2^n - 1)) - 5 = 5.$$

On a donc une variable certaine et $\mathbb{E}(G_J) = 5$.

3. Pour jouer la première partie P doit disposer de 5 euros, puisqu'il a déjà 5 euros donnés par J . Ensuite ce qu'il gagne à chaque fois lui permet de couvrir la mise suivante de J . Par contre J doit disposer d'une somme infinie s'il veut être sûr de pouvoir continuer le jeu.

4. Si J ne dispose pas d'une somme infinie. Le jeu s'arrête soit lorsque J a gagné, soit lorsque la somme qu'il doit miser dépasse ce qu'il possède.

Supposons que J puisse miser au plus p fois. Pour $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il peut avoir gagné 5 euros après la n -ième partie, et ceci avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$, mais il peut avoir perdu à chacune des p parties. Il a donc perdu, en euros

$$5 + 10 \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = 5 + 10(2^p - 1) = 10 \cdot 2^p - 5,$$

avec la probabilité $\mathbb{P}(FF \dots F)$ où F figure p fois,

$$\mathbb{P}(FF \dots F) = \frac{1}{2^p}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(G_J) = 5 \sum_{n=1}^p \frac{1}{2^n} - (10 \cdot 2^p - 5) \frac{1}{2^p} = 5 \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) - (10 \cdot 2^p - 5) \frac{1}{2^p} = -5$$

ce qui montre que le pigeon n'est pas celui qu'on croit !

Exercice 23. *** Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à droite, vérifiant $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$. On veut démontrer qu'il existe une variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition. Pour $u \in]0, 1[$, on pose

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}.$$

1. Vérifier que G est bien définie.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $u \in]0, 1[$, $F(x) \geq u \iff x \geq G(u)$.
3. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la fonction de répartition de $G(U)$?

Solution 23. .

1. Fixons $u \in]0, 1[$. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}$ est non-vide (car $\lim_{+\infty} F = 1$, tous les x assez grands sont dans cet ensemble), minorée (car $\lim_{-\infty} F = 0$, tous les x assez petits ne sont pas dans cet ensemble), et donc la borne inférieure existe.

2. Soient x et u tels que $F(x) \geq u$. Alors,

$$x \geq \inf\{y \in \mathbb{R}; F(y) \geq u\} = G(u).$$

Réciproquement, on suppose que $x \geq G(u)$. Par croissance de F , on a

$$F(x) \geq F(G(u)).$$

On va donc prouver que $F(G(u)) \geq u$, et pour cela on va utiliser la continuité à droite de F en $G(u)$: par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite (x_n) décroissante, telle que $F(x_n) \geq u$ et (x_n) converge $G(u)$. Et par continuité à droite, pour tout n , $F(G(u)) \geq u$.

3. On a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}(G(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x),$$

d'après la définition de la loi uniforme. La fonction de répartition de $G(U)$ est bien F .

Exercice 24. (Borel-Cantelli) ** Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , de même loi. On note

$$F = \{\omega \in \Omega \mid \exists (n_k) \uparrow \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, X_{n_k}(\omega) > n_k\}.$$

où $(n_k) \uparrow$ signifie que la suite (n_k) est strictement croissante.

On pose $A_n = (X_n > n)$; montrer que $F = \limsup A_n$, puis que $\mathbb{P}(F)$ vaut 0 ou 1 selon la valeur $\mathbb{E}(X_1)$.

Solution 24. . On sait que $\omega \in \limsup A_n$ si et seulement si il existe une suite infinie (strictement croissante) d'indice (n_k) telle que $\omega \in A_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc si et seulement si $\omega \in F$.

Donc

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} \left(\bigcup_{n \geq k} (X_n > n)\right)\right).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n > n) = \mathbb{P}(X_1 > n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 > n) = \mathbb{E}(X_1)$.

Le théorème de Borel-Cantelli nous que

1. si $\mathbb{E}(X_1) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(F) = 0$.
2. Si $\mathbb{E}(X_1) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(F) = 1$.

Variables aléatoires
(Solutions)