Espaces euclidiens

1 Structure euclidienne, adjoints

Exercice 1. ♡* Soit E un espace vectoriel préhilbertien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E,\ (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
Carcatériser f.

Solution **1.** . *Si x et y sont deux vecteurs non nuls, alors*

$$\left(\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} | \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) = 0$$

dont on déduit en passant à l'expression en f et en développant

$$\left\|\frac{f(x)}{\|x\|}\right\|^2 - \left\|\frac{f(y)}{\|y\|}\right\|^2 = 0$$

et donc $\left\|\frac{f(x)}{\|x\|}\right\|^2 = \alpha \geq 0$ une constante indépendante de $x \neq 0$. Ceci montre que f est la composée d'un endomorphisme orthogonal avec une homothétie. On dit que f est une similitude.

Exercice 2. * Soit E un espace vectoriel euclidien, p et $q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre :

1. $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$;
2. Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Solution **2.** .
$1/ \Rightarrow 2/$: *par hypothèse, $\forall x \in E$, $p(x) \in \mathrm{Im}\, q$, donc $q(p(x)) = p(x)$. Ce qui montre $q \circ p = p$. Comme P et q sont auto-adjoints, on obtient la relation $p = p \circ q$. Comme p est un projecteur orthogonal, $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. En particulier,*

$$\|p(x)\| = \|p(q(x))\| \leq \|q(x)\|.$$

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}\, p$, alors $p(x) = x$ et donc par hypothèse $\|q(x)\| = \|x\|$. Si $x = x_{\mathrm{Im}\, q} + x_{\ker q}$, $\|x\|^2 = \|x_{\mathrm{Im}\, q}\|^2 + \|x_{\ker q}\|^2$ et $q(x) = x_{\mathrm{Im}\, q}$. On en déduit $\|q(x)\| = \|x\|$ si et seulement si $x_{\ker q} = 0$, ce qui montre $x \in \mathrm{Im}_, q$.

Exercice 3. ♡ Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$(A, B) = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right).$$

1. Vérifier que c'est un produit scalaire sur $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$.
2. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application linéaire

$$\Phi_{\mathrm{A}} : \begin{cases} \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto A^T X A. \end{cases}$$

Calculer l'adjoint (pour le produit scalaire ci-dessus) de Φ_A.

Solution **3.** . *1. C'est du cours : on reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.*

2. Pour $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule

$$(\varphi_A(X), Y) = \mathrm{Tr}(A^T X^T A Y) = \mathrm{Tr}(X^T A Y A^T) = (X, \varphi_{A^T}(Y)).$$

Ce qui montre que $\varphi_A^* = \varphi_{A^T}$.

Exercice 4. $\heartsuit$** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un endomorphisme euclidien.

1. Montrer que $\ker u = \ker u^* \circ u$.
2. On suppose $u^* \circ u = u \circ u^*$.
   (a) Montrer que $\ker u = \ker u^*$.
   (b) En déduire que $E = \mathrm{Im}\, u \oplus^{\perp} \ker u$, puis que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^*$.
   (c) Si F est stable par u, montrer que $F = u(F) \oplus^{\perp} (F \cap \ker u)$.
   (d) En déduire que $u(F) = u^*(F)$, puis que $F^{\perp}$ est stable par u.

Solution **4.** .

1. Soit $x \in \ker u^* \circ u$, alors $0 = (x|u^* \circ u(x)) = (u(x)|u(x)) = \|u - x)\|^2$ et donc $u(x) = 0$. On a montré que $\ker u^* \circ u \subset \ker u$. L'autre inclusion est immédiate.

2. (a) On a $\ker u^* \circ u = \ker u \circ u^*$. D'après la première question, $\ker u = \ker u^*$.

(b) Car $(\mathrm{Im}\, u)^{\perp} = \ker u^* = \ker u$.

(c) $u(F) \oplus^{\perp} (F \cap \ker u)$, d'après la question précédente. Et le thérème du rang appliqué à l'endomorphisme induit par u sur F, on a $\dim F = \dim(u(F)) + \dim(F \cap \ker u)$, d'où l'égalité des deux espaces.

(d) D'après la question précédente,

$$u^*(F) = u^*\big(u(F) + (F \cap \ker u)\big) = u^*\big(u(F) + (F \cap \ker u^*)\big) = u^* \circ u(F) = u \circ u^*(F)$$

et donc $u^*(F)$ est encore stable par u. Puisque $u^*(F \cap \ker u^*) = \{0\}$, $u^{*n}(F) = u^*(F)$ et avec l'égalité précédente, on obtient

$$u^*(F) = u^{*n}(F) = u^{*n}(u(F)) \quad (*)$$

Soit $x \in u(F) \setminus \{0\}$ et on choisit p un entier tel que $(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$ libre et $u^p(x) = a_0 x + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$. Le sous-espace $F_x = \mathrm{vect}\,(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$ est le plus petit sous-espace stable qui contient x.
La matrice de $\widetilde{u}$ dans la base $(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$ est la matrice compagnon

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

où $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.
De plus, $F_x \subset u(F)$, donc $F_x \cap \ker u = \{0\}$, d'après 2 b). On en déduit que l'endomorphisme $\widetilde{u}$ induit par u sur F_x est un isomorphisme ; en particulier, le coefficient a_0 est non nul.
Par définition de P, $P(u)(x) = 0$, donc $(P(u)(x)|P(u)(x)) = 0$. Mais pour tout i et j,

$$(u^i(x)|u^j(x)) \underset{adjoint}{\overset{Def.}{=}} (x|u^{*i}(u^j(x)) \underset{u \circ u^*}{\overset{u^* \circ u =}{=}} (x|u^j(u^{*i}(x)) \underset{adjoint}{\overset{Def.}{=}} (u^{*i}(x)|u^{*j}(x))$$

Par linéarité, pour tout polynôme Q, $(Q(u)(x)|Q(u)(x) = (Q(u^*)(x)|Q(u^*)(x))$. En particulier $P(u^*)(x) = 0$. D'où

$$x = \frac{1}{a_0} u^* \left(a_1 x + \cdots + u^{*n-1}(x)\right) \in u^*(F).$$

Donc $x \in u^*(F)$. On a montré l'inclusion $u(F) \subset u^*(F)$. Pour des raisons de dimension, ils sont égaux.
En conclusion, $u(F)$ et donc F sont stables par u et u^*. Par dualité, $u(F)^{\perp}$ et $F^{\perp}$ sons stables par u et u^*.

Exercice 5. ** Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\mathcal{B}$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que f^* a la même propriété.
2. Montrer que $f - Id_E$ et $f^* - Id_E$ ont le même noyau.
3. Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus^\perp \mathrm{Im}(f - Id_E)$.
4. Calculer, pour $x \in E$, $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x)$.

Solution **5.** .

1. *On a :*
$$\|f^*(x)\|^2 = (f^*(x), f^*(x)) = (f(f^*(x)), x) \leq \|f(f^*(x))\|\|x\| \leq \|f^*(x)\|\|x\|,$$
où on a utilisé successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis la propriété vérifiée par f pour $y = f^*(x)$. En simplifiant par $\|f^*(x)\|$, on obtient le résultat demandé.
2. *Prenons $x \in \ker(f - Id_E)$. On a :*
$$\|f^*(x) - x\|^2 = \|f^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, f^*(x)).$$
Or, $(x, f^*(x)) = (f(x), x) = (x, x) = \|x\|^2$. On en déduit que :
$$\|f^*(x) - x\|^2 \leq \|f^*(x)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0.$$
Ainsi, $f^*(x) - x = 0$, et $x \in \ker(f^* - Id_E)$. On a donc prouvé que $\ker(f - Id_E) \subset \ker(f^* - Id_E)$. Puisque $(f^*)^* = f$, et que f^* vérifie la même propriété que f, on en déduit que l'inclusion inverse est aussi vérifiée.
3. *Remarquons que $\ker(f - Id_E) = \ker(f^* - id_E^*) = (Im(f - Id_E))^\perp$, ce qui prouve que les deux sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux.*
4. *D'après la question précédente, $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker(f - Id_E)$ et $x_2 \in Im(f - Id_E)$. Pour x_1, on a $f(x_1) = x_1$, et par suite $f^k(x_1) = x_1$. On en déduit que $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_1) = x_1$. Pour x_2, x_2 s'écrit $x_2 = f(y) - y$. On a $f(x_2) = f^2(y) - f(y)$, et donc $x_2 + f(x_2) = f^2(y) - y$. Par récurrence, on prouve que $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_2) = \dfrac{f^p(y) - y}{p}$. Mais $\|f^p(y)\| \leq \|y\|$, et donc $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_2) = 0$. En conclusion, on en déduit que $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x) = x_1$, c'est-à-dire que cette limite est le projeté orthogonal de x sur $\ker(f - Id_E)$.*

Exercice 6. ♡** Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\mathcal{B}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$ un projecteur.

1. Démontrer que f^* est un projecteur.
2. Montrer que $f^* = f$ si et seulement si f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.
3. On suppose que f et f^* commutent.
   (a) Démontrer que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.
   (b) Démontrer que $\ker(f \circ f^*) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
   (c) En déduire que $\ker(f \circ f^*) = \ker(f)$ et que $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}(f)$.
4. En déduire que f et f^* commutent si et seulement si $f = f^*$.

Solution **6.** .

1. *Soient $x, y \in E$. Alors on a*

$$\langle f^*(f^*(x)), y\rangle = \langle x, f(f(y))\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle.$$

Ainsi, $f^*(f^*(x)) = f^*(x)$, et donc f^* est bien un projecteur.

2. *On sait que $\big(Im(f)\big)^\perp = \ker(f^*)$. Ainsi, si $f = f^*$, alors $\ker(f) = Im(f)^\perp$, et f est bien projection orthogonale sur $Im(f)$. Réciproquement si f est projection orthogonale sur $Im(f)$, alors f^* est un projecteur sur $Im(f^*) = \ker(f)^\perp = Im(f)$, parallèlement à $\ker(f^*) = Im(f)^\perp = \ker(f)$. f^* étant un projecteur ayant les mêmes éléments caractéristiques que f, on a bien $f = f^*$.*

3. (a) *Le fait que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale suit d'un simple calcul algébrique :*

$$(f \circ f^*)^2 = f \circ f^* \circ f \circ f^* = (f \circ f) \circ (f^* \circ f^*) = f \circ f^*.$$

De plus, c'est une projection orthogonale d'après la question précédente, car

$$(f \circ f^*)^* = f \circ f^*.$$

(b) *Soit $x \in \ker(f^* \circ f) \cap Im(f)$, et écrivons $x = f(y)$. Alors,*

$$0 = f(f^*(x)) = f^*(f(f(y))) = f^*(f(y)) = f^*(x).$$

Ainsi, $x \in \ker(f^*) = Im(f)^\perp$, et donc $x = 0$.

(c) *Prenons d'abord $x \in \ker(f)$. Alors*

$$f(f^*(x)) = f^*(f(x)) = 0,$$

et donc $\ker(f) \subset \ker(f \circ f^*)$. Réciproquement, prenons $x \in \ker(f \circ f^*)$. Alors $x = u + v$, avec $u \in \ker(f)$ et $v \in Im(f)$. Il suffit de démontrer que $v = 0$. Mais il et facile de vérifier que $f(f^*(v)) = 0$ (car cette même relation est aussi satisfaite pour x et u), et donc d'après la question précédente, $v = 0$.
Pour l'égalité concernant les images, on peut remarquer que $Im(f \circ f^*) \subset Im(f)$, et conclure en utilisant un argument de dimension.

4. *Si f et f^* commutent, alors f est une projection sur $\ker(f) = \ker(f \circ f^*)$ parallèlement à $Im(f) = Im(f \circ f^*)$. C'est donc une projection orthogonale, et ceci garantit que $f = f^*$.*

2 Endomorphismes autoadjoints

Exercice 7. ♡ Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(A^k)_{k\geq 0} \to 0$ ssi $(\operatorname{tr} A^k)_{k\geq 0} \to 0$.

Solution 7. . *L'application trace est continue. Pour la réciproque, A est diagonalisable et la trace vaut la somme des valeurs propres. L'hypothèse implique que les valeurs porpres sont dans $]-1, 1[$. On conlut immédiatement.*

Exercice 8. ♡ Trouver toutes les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MM^TM = In$.

Solution 8. . *On ultiplie par à gauche par M^T et $M^TMM^TM = M^T$ montre que M^T est symétrique positive. Dans une base de diagonalisation, les valeurs propres de M sont positives et de cube 1. On en déduit que M vaut I_n. Il n'y a qu'une seule solution.*

Exercice 9. ** Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\mathcal{B}$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note

$$\rho(f) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } f\}$$

On rappelle que $|||f|||_2 = \sup\{\|f(x)\|_2;\ \|x\|_2 \leq 1\}$.

1. On suppose que f est symétrique.
   (a) Montrer que $|||f|||_2 = \rho(f)$.

(b) Montrer que $|||f|||_2 = \sup\{| < f(x)|x > | \ , \ x \in E, \ \|x\|_2 = 1\}$.

2. On ne suppose plus que f est symétrique. Montrer que $|||f|||_2^2 = |||f^*f|||_2$.
3. En déduire que $|||f|||_2 = \sqrt{\rho(f^*f)}$.
4. Montrer que $|||f|||_2 = |||f^*|||_2$

Solution **9.** . *1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres pour f. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, et donc*

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 x_i^2 \leq \rho(f)^2 \|x\|^2,$$

ce qui prouve que $\|f\| \leq \rho(f)$. D'autre part, il existe k tel que $\rho(f) = \lambda_k$. On a alors $\|f(e_k)\| = |\lambda_k| = \rho(f)$, et comme $\|e_k\| = 1$, on a $\rho(f) \leq \|f\|$.

2. Remarquons d'abord que f^*f est symétrique (car $(f^*f)^* = f^*f$). Ceci montre que $\rho(f^*f) = \|f^*f\|$. Il reste à prouver que $\|f\| = \|f^*f\|^{1/2}$. Mais,

$$< f(x)|f(x) > = < x|f^*f(x)|x >$$

et en passant à la borne supérieure pour $\|x\| = 1$:

$$\|f\|^2 = \|f^* \circ f\|.$$

3. On en déduit $|||f\|_2^2 \leq |||f^*f|||_2 \leq |||f^*|||_2 \, |||f|||_2$. Donc $|||f||| \leq |||f^*|||$. De même, on a l'inégalité inversée et donc égalité.

Exercice 10. $\heartsuit$* Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. Soit $v \in S(E)$ tel que $(v(x), x) = 0$ pour tout x. Montrer que $v = 0$.
2. Soient $u_1, \dots, u_p \in S(E)$. On suppose que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$, et que

$$\forall x \in E, (u_1(x), x) + \cdots + (u_p(x), x) = (x, x).$$

(a) Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$.

(b) Montrer que $E = Im(u_1) \oplus \cdots \oplus Im(u_p)$.

(c) Montrer que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.

Solution **10.** . *1. Soit λ une valeur propre de v. Alors on a $0 = (v(x), x) = \lambda \|x\|^2$, et donc $\lambda = 0$. Puisque v est diagonalisable, et que toutes ses valeurs propres sont nulles, on en déduit que $v = 0$.*

2. (a) En utilisant la linéarité, ceci se traduit par

$$\forall x \in E, (u_1(x) + \cdots + u_p(x) - Id_E(x), x) = 0.$$

Puisque $u_1 + \cdots + u_p - Id_E$ est symétrique, on en déduit $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$.

(b) La relation précédente montre que tout x de E se décompose en $x = u_1(x) + \cdots + u_p(x)$. Ainsi, on a $E = Im(u_1) + \cdots + Im(u_p)$. D'autre part, la relation sur les rangs entraîne automatiquement que la somme est directe ! (on utilise le fait que F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$).

(c) Puisque $Id_E = u_1 + \cdots + u_p$, on a, pour tout x et tout k :

$$u_k(x) = u_1 \circ u_k(x) + \cdots + u_p \circ u_k(x).$$

Par l'unicité de la décomposition due à la somme directe, on en déduit que $u_i \circ u_k = 0$ si $i \neq k$, et $u_k^2 = u_k$. Ainsi, u_k est une projection. Puisqu'en outre l'endomorphisme est symétrique, c'est une projection orthogonale !

Exercice 11. *** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On munit E de sa structure euclidienne canonique. On note $e = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de E.

1. Soit $u \in S^{++}(E)$. Montrer que u est inversible, que $u^{-1} \in S^{++}(E)$ et que u et u^{-1} sont diagonalisables dans une même base orthonormée.
2. Soit $u \in S^{++}(E)$. Montrer : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(y), y\rangle$.
   Si $k \in \{1, \cdots, n\}$ et $u \in S^{++}(E)$, on pose : $\delta_k(u) = \inf\{\langle u(x), x\rangle ; x \in E,\ \langle x, e_k\rangle = 1\}$.
3. Montrer : $\forall (u,v) \in S^{++}(E)^2$, $\delta_k(u+v) \geq \delta_k(u) + \delta_k(v)$.
4. Si $u \in S^{++}(E)$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$, montrer : $\delta_k(u) = \dfrac{1}{\langle u^{-1}(e_k), e_k\rangle}$.
5. Soient $u \in S^{++}(E)$ et A la matrice de u dans la base canonique. On note A_k la matrice extraite de A obtenue en enlevant la k-ième ligne et la k-ième colonne. Montrer : $\delta_k(u) = \dfrac{\det A}{\det A_k}$.
6. En déduire, si A et B sont dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, que

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_k+B_k)} \geq \frac{\det A}{\det A_k} + \frac{\det B}{\det B_k}.$$

<u>*Solution*</u> **<u>11.</u>** **.**

1. *Une matrice symétrique positive est diagonalisable dans une base orthonormée avec pour diagonale, les valeurs propres sont alors strictement positives. L'inverse dans cette base est l'inverse des éléments diagonaux.*
2. *Dans cette base de vecteurs propres, il s'agit de prouver*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} y_i^2\right)$$

   ce que l'on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au vecteur $(\sqrt{\lambda_i}\, x_i$ *et* $(\sqrt{\lambda_i}^{-1} y_i)$
3. *L'inégalité ci-dessus redémontre que si* $x \neq 0$*, alors* $\langle u(x), x\rangle > 0$*, on en déduit que*

$$\forall x \in E,\ \langle x, e_k\rangle = 1,\ \langle (u+v)(x), x\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle v(x), x\rangle \geq \delta_k(u) + \delta_k(v).$$

4. *L'inégalité du 1/ pour* $y = e_k$ *donne*

$$\langle x, e_k\rangle = 1 \leq \langle u(x), x\rangle \langle u^{-1}(e_k), e_k\rangle$$

   et on peut avoir égalité si les deux vecteurs sont colinéaires, donc $\dfrac{1}{\langle u^{-1}(x), x\rangle}$ *est non seulement un minorant, c'est un minimum.*
5. *On doit montrer que* $\langle u^{-1}(e_k), e_k\rangle = \dfrac{\det A_k}{\det A}$ *; or* u^{-1} *admet pour inverse* $(\det A)^{-1}((-1)^{i+j}\Delta_{i,j})$ *où* $\Delta_{i,j}$ *est le mineur* (i,j) *de* A*.*
6. *C'est l'inégalité 3/ écrite sous la forme de 5/.*

<u>Exercice 12.</u> ♡** Soit A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer qu'il existe $P \in GLn(\mathbb{R})$ telle $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A \in \mathbb{R}[C]$ et $B \in \mathbb{R}[C]$.

<u>*Solution*</u> **<u>12.</u>** **.** *Dans une base de codiagonalisation (orthonormée), A est semblable à D et B à D' diagonales. On poce C' une matrice diagonale de diagonale $1, \cdots, n$. Utiliser les polynômes interpolateur de Lagrange.*

<u>Exercice 13.</u> *** *Cachan, Rennes.* On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -In \\ In & 0 \end{pmatrix}$ et on définit

$$Sp_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ {}^tMJM = J\}.$$

1. Montrer que Sp_{2n} est un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$. Quelles sont a priori les valeurs possibles pour $\det M$?
2. Soit $M \in Sp_{2n}$. Montrer que $\det(M^T M + I_{2n}) > 1$.
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.
4. Montrer que $\forall M \in Sp_{2n}$, $\det M = 1$.

Solution **13.** . *Preuve due à Donsub Rim (2015)*

1. *On obtient* $\det M = \pm 1$. *Montrer que* $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe ne pose aucun problème.*
2. *La matrice* $M^T M$ *appartient à* $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. *Par opération sur les lignes et les colonnes, on a*
$$\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - iB & 0 \\ B + iA & A + iB \end{pmatrix}$$
Le déterminant recherché vaut $\det(A + iB)\det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$.
4. *On écrit*
$$M^T M + I_n = M^T(M + M^{T-1}) = M^T(M + JMJ^{-1})$$
Par blocs on trouve
$$M + JMJ^{-1} = \begin{pmatrix} M_{1,1} + M_{2,2} & M_{1,2} - M_{2,1} \\ -M_{1,2} + M_{2,1} & M_{1,1} + M_{2,2} \end{pmatrix}$$
Donc $\det(M + JMJ^{-1}) \geq 0$ *apr la question précédente et finalement* $\det M \geq 0$, *ce qui permet de conclure :* $\det M = 1$.

Exercice 14. ♡♡* Soit $(E, (\ |\ )$ un espace vecoriel euclidien. On dit que $f \in \mathcal{E}$ est antisymétrique si $f^* = -f$.

1. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée est antisymétrique.
2. Montrer que la seule valeur propre réelle possible est 0.
3. Montrer que A^2 est orthodiagonalisable.
4. En déduire que si λ est une valeur propre complexe, alors λ est imaginaire pure.
5. Montrer que si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable est par f.
6. Montrer que si $f \neq 0$, alors f admet un plan stable P et que la matrice de l'endomorphisme induit dans une base orthonormée est de la forme $S_b = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$
7. Montre que f est semblable dans une base orthonormée à une matrice diagonale dont la diagonale est composée de zéros ou de blocs du type S_b.

Solution **14.**

1. *Si* f *est antisymétrique,* $(f(x)|y) = (x|f^*(y)) = -(x|f(y))$.
Dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, *la matrice* A *de* f *est la matrice* $A = \big((f(e_j)|e_i\big) = \big(-(e_j|f(e_i)\big) = -A^T =$. *Comme la matrice de* f^* *est* ${}^t(A)$, *on en déduit* $A = -A^T$.
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x \neq 0$ *tels que* $f(x) = \lambda x$, *alors* $(f(x)|x) = \begin{cases} \lambda(x|x) \\ (x|f^*(x)) = -(x|f(x)) = -\lambda(x|x) \end{cases}$.
Comme x *est non nulle,* $(x|x) \neq 0$ *et* $\lambda = 0$.
3. *Comme* $(A^2)^T = (A^T)^2 = A^2$, *la matrice* A^2 *est orthogonalisable dans* $\mathbb{R}$.
4. *Si* λ *est une valeur propre complexe de* A, *alors* λ^2 *est une valeur propre de* A^2 *et donc* $\lambda^2 = 0$. *On en déduit que* $\lambda \in i\mathbb{R}$.
5. *si* F *stable par* f, *alors* $F^\perp$ *est stable par* $f^* = -f$, *donc* $F^\perp$ *est stable par* F.

6. *Si $f \neq 0$, alors $(\ker f)^{\perp}$ est stable par f et l'endomorphisme induit sur $(\ker f)^{\perp}$ admet une valeur propre complexe $i\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit X un vecteur propre non nul associé à $i\lambda$, alors $\overline{AX} = A\overline{X} = -i\lambda\overline{X}$. Donc le plan P engendré $(X, \bar{X})$ est une famille libre, car formée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Donc la famille $(\frac{X+\bar{X}}{2}, \frac{X+i\bar{X}}{2i})$ engendre un plan P réel stable par f.*
De plus, si $f^* = -f$, alors l'endomorhisme induit sur P est encore antisymétrique. Sa matrice dans toute base orthonormée est antisymétrique, donc de la forme S_b.
7. *Si $f \neq 0$, il existe u plan stable P_1 et dans une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de P_1.*
On suppose que l'on a trouvé $P_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} P_r$ une somme directe de plans stables P_i de base orthonormée $\mathcal{B}_i$.
Si l'endomorphisme induit sur $(P_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} P_r)^{\perp}$ est nul, alors on prend une base orthonormée de l'orthonormée de l'orthogonale (éventuellement vide, si $P_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} P_r = E$) et en concaténant les bases, on a une base de diagonalisation comme demandée.
Si Si l'endomorphisme induit sur $(P_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} P_r)^{\perp}$ est non nul, alors il existe un plan stable P_{r+1} de f.
Comme E est de dimension finie et que la dimension de la somme des plans augmente strictement, on en déduit qu'il existe u rang r pour lequel l'endomorphisme induit sur $(P_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} P_r)^{\perp}$ est nul. Ce qui termine la preuve.
On en déduit que le rang de f est pair. On pouvait facilement trouver ce résult, car f induit sur $(\ker f)^{\perp}$ un ismorphisme $\tilde{f}$. On a $\det f^* f = \det f^* \det f = \det f^2$ et $\det f^* f = \det(-f) f = (-1)^r (\det f)^2$, où r est le rang de f par thérème du rang. Donc r est pair.

Exercice 15. ** Soit $(E, (\mid)$ un espace vecoriel euclidien. On dit que $f \in \mathcal{E}$ est un endomorphisme normal si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

1. On pose $p = \dfrac{f+f^*}{2}$ et $q = \dfrac{f-f^*}{2}$. Montrer que
$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}\,(p)}^{\perp} E_\lambda(p)$$
et que pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(p)$, $E_\lambda(p)$ est stable par q.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de p telle que la matrice de q soit une matrice diagonale dont la diagonale est composée de zéros ou de blocs du type $S_b = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de f soit diagonale dont la diagonale est composée de blocs 1×1 ou 2×2 que l'on décrira.

Solution **15.**

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Spec}\, A \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, tel que $Q^T Q = A$.
2. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $A_{i,i} > 0$
3. Montrer que $(\det A)^{1/n} \leq \dfrac{\mathrm{tr}\, A}{n}$.
4. Soit $D = \mathrm{Diag}\,(d_1, \cdots, d_n)$ la matrice diagonale telle que $d_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}$. Montrer que $DAD \in S_n(\mathbb{R})^{++}$ et que $\det A \leq \prod_i a_{i,i}$.

Solution **16. .**

1. *A est orthodiagonalisable : $A = P^T D P$, avec D diagonale de valeurs propres strictement positive. On prend $\sqrt{D}$ la racine dans $S_n^+(\mathbb{R})$ et $Q = P\sqrt{D}$.*
2. *Les éléments de la diagonale de $Q^T Q$ correspondent à $C_i^T C_i > 0$ car les vecteurs colonnes sont non nuls.*

3. Il faut comparer $\det A = \prod_i \lambda_i$ *et* $tr A = \sum_i \lambda_i$.

4. Pour tout $X \neq 0$, *on a* $X^T DADX = (DX)^T A(DX) > 0$, *donc* $DAD \in S_n(\mathbb{R})^{++}$. *Or* $Tr\, DAD \leq n$, *d'où le résultat.*

Exercice 17. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $AB + BA = 0$. Montrer que $AB = BA = 0$.

Solution **17.** . *On note* f *et* g *les endomorphismes de* $\mathbf{R}^n$ *associés à* A *et* B *dans la base canonique. Il existe une base orthonormale* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *où la matrice de* f *est une matrice diagonale* $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. *Les* d_i *sont des réels positifs. Notons* $C = (c_{i,j})$ *la matrice de* g *dans* B. *On a* $DC + CD = 0$. *Pour tous* (i,j), *on a* $(d_i + d_j)\, c_{ij} = 0$; *si* $d_i > 0$ *ou* $d_j > 0$ *alors* $(d_i + d_j) > 0$ *et* $c_{i,j} = 0$; *sinon* $d_i = 0$ *et* $d_j = 0$ *; dans tous les cas* $d_j c_{ij} = 0$ *et* $d_j c_{ij} = 0$. *Donc* $DC = 0$ *et* $CD = 0$. *Ainsi* $fg = gf = 0$ *puis* $AB = BA = 0$.

3 Endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 18. ♡ Soit α un réel, n un entier naturel, et la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une expression de A_n^n utilisant $\theta_n = \arctan \frac{\alpha}{n}$.
2. Montrer que les coefficients de A_n^n admettent une limite lorsque $n \to +\infty$ et donner cette limite en fontion de α.

Solution **18.** . *1/ Comme suggéré par l'énoncé :*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta_n \\ \tan\theta_n & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta_n} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta_n} R(\theta_n),$$

où $R(\theta_n)$ *est la matrice de la rotation d'angle* θ_n. *On en déduit immédiatement que*

$$A_n^n = \frac{1}{\cos^n \theta_n} R(n\theta_n).$$

2/ Si n *tend vers* $+\infty$, *alors*

$$\theta_n = \arctan \frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha}{n}, \quad \cos\theta_n = 1 - \frac{\theta_n^2}{2} + o(\theta_n^2) = 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} R(n\theta_n) = R(\alpha).$$

Enfin

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\cos^n \theta_n} = \lim_{n \to +\infty} exp(-n \ln(\cos\theta_n)) = 1,$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} A_n^n = R(\alpha).$$

Exercice 19. Étudier les isométries suivantes de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \; C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \; D = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solution **19.** .

Exercice 20. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_3$ (resp. $e_1 - e_3$) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (resp. $\frac{\pi}{3}$).

Solution **20.** .

Exercice 21. ♡* Dans $\mathbb{R}^2$, que dire exactement de $u \circ v \circ u^{-1}$ si u est une rotation et v une réflexion ?

Solution **21.** . *Si v est une réflexion d'hyperlan P, alors $u \circ v \circ u^{-1}$ est la réflexion d'hyperpaln $u(P)$.*

Exercice 22. ♡* Soient f et g deux rotations vectorielles qui ne sont pas des retournements. Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont le même axe.

Solution **22.** . *On sait que si f et g commutent alors les sous-epaces propres de f sont stables g et réciproquement. On $E_1(f)$ est de dimension 1, car f n'est pas un retournement. Donc c'est aussi un sous-espace de g, mais le seul possible est $E_1(g)$. On en déduit que les deux rotations ont même axe.*
Réciproquement, si les deux rotation ont même axe $\mathbb{R}i$, alors dans une base ortnormée (i, j, k) f admet pour matrice une amtrice du type $J(\theta)$ et g une matrice $J(\theta')$. Et $J(\theta) \times J(\theta') = J(\theta + \theta')$, donc f et g commutent.

Exercice 23. * Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit f_1 et f_2 deux retournements d'axes respectifs D_1 et D_2 distincts. Montrer que f_1 et f_2 commutent si et seulement si D_1 et D_2 sont orthogonaux.

Solution **23.** . *Comme f_1 et f_2 commutent, $D_1 = \mathbb{R}e_1$ est stable par f_2, donc e_1 est un vecteur propre de f_2 et comme D_1 et D_2 sont distincts, $f_2(e_1) = -e_1$. De même, si $D_2 = \mathbb{R}e_2$, $f_1(e_2) - e_2$. Les sous-espace propres d'un endomorphisme orthogonal sont deux à deux à deux orthognaux, $e_1 \perp e_2$. Et $D_1 \perp D_2$. Récirpoquement, si $e_1 \perp e_2$ alors $e_1 \in E_{-1}(f_2)$ et $e_2 \in E_{-1}(f_1)$. Et comme $P = (e_1, e_2)$ est stable par f_1 et f_2, on en déduit que $P^\perp = \mathbb{R}e_3$ est stable par f_1 et f_2. Donc e_3 est un vecteur propre de f_1 et f_2 et comme ce des retournements, $f_1(e_3) = f_2(e_3) = -e_3$. On en déduit que f_1 et f_2 commutent.*

4 Endomorphismes orthogonaux

Exercice 24. *

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\exp(M)$ est une matrice orthogonal.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a \wedge x$. Décrire l'application $\exp \varphi$.

Solution **24.** .

1. *La transposée est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc continu. On en déduit que $\exp(M^T) = (\exp M)^T$, puis $(\exp M)^T \exp(M) = I_n$. Par définition $\exp(M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Dans une base orthonormée $(\frac{a}{\|a\|}, b, \frac{a}{\|a\|} \wedge b)$, la matrice de φ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a| & 0 \end{pmatrix}$*

Le calcul de l'exponentielle donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\|a\| & -\sin\|a\| \\ 0 & \sin\|a\| & \cos\|a\| \end{pmatrix}$. On a donc la rotation d'axe orienté par a et d'angle $\|a\|$.
On peut retrouver le résultat sans calculer explicitement l'exponentielle : La matrice M est antisymétrique, d'après la question 1, $\exp(M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\det \exp(T) = \exp(\operatorname{Tr} T = 1$, donc $\exp(T)$ est une rotation. Enfin, en terme de complexe, $i\|A\|$ est une valeur propre de A et $\exp(i\|A\|)$ en est une de $\exp(T)$, donc $\exp(T)$ et bien la rotation d'axe orienté par a et d'angle $\|A\|$.

Exercice 25. ♡* Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}^2 \mapsto \operatorname{tr} {}^tAB$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\omega \in \mathcal{M}$ pour que $M \mapsto \omega M$ soit φ-orthogonale.

Solution **25.** .

1. *Quasi du cours : c'est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Si ω est orthogonale, on a un endomorphisme orthogonal.*
   Réciproquement, si pour tout M, $tr(M^T\omega^T\omega M) = tr(M^TM)$, alors $\omega^T\omega$ est diagonasable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (E_1, \cdots, E_n)$ avec $\omega^T\omega E_i = \lambda_i E_i$. L'égalité $tr(E_i^T\omega^T\omega E_i) = tr(E_i^TE_i) = 1$ montre que $\lambda_i = 1$ pour tout i et donc $\omega^T\omega = I_n$, c'est-à-dire ω est orthogonale.

Exercice 26. ** Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Prouver que

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\right| \leq n \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}| \leq n^{3/2}.$$

<u>Solution</u> **26.** . *Une des difficultés de l'exercice vient du fait qu'il faut trouver la bonne caractérisation des matrices orthogonales. Ainsi, une caractérisation qui convient est de remarquer que M est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée. Précisément, si $(u_1,\dots,u_n)$ sont les vecteurs colonnes de M, alors $(u_1,\dots,u_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et $m_{i,j} = \langle u_j, e_i\rangle$. On en déduit alors assez facilement la première inégalité. On a en effet :*

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j} = \langle \sum_{j=1}^n u_j, \sum_{i=1}^n e_i\rangle.$$

Notons $u = u_1+\dots+u_n$ et $e = e_1+\dots+e_n$. Remarquons que, puisque les bases que l'on considère sont orthonormées, $\|u\|_2 = \|e\|_2 = n^{1/2}$. On conclut alors facilement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\right| \leq |\langle u,e\rangle| \leq \|u\|_2\cdot\|e\|_2 = n.$$

Pour les autres inégalités, on introduit la norme $\|\ \|_1$ sur $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = |x_1|+\dots+|x_n|.$$

Ces deux normes sont équivalentes :

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n^{1/2}\|x\|_2.$$

En effet, l'inégalité de gauche est immédiate en élevant au carré, celle de droite provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en écrivant

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n 1\times|x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{1/2}\|x\|_2.$$

Nous avons donc

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}| = \sum_{1\leq j\leq n}\|u_i\|_1,$$

puis, avec l'encadrement de $\|\ \|_1$ ci-dessus

$$n\sum_{1\leq j\leq n}\|u_i\|_2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n}|m_{i,j}| \leq n^{1/2}\sum_{1\leq j\leq n}\|u_i\|_2.$$

Ceci donne les deux autres inégalités voulues, puisque $\|u_i\|_2 = 1$.

Exercice 27. ** Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\Delta(A) = \sum_{i=1}^n a_{1,i}^2$. On dit que A est semi-orthogonale lorsque $AA^T = A^TA = \Delta(A)I_n$.

1. Montrer qu'une matrice est semi-orthogonale si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $AA^T = A^TA = \lambda I_n$.
2. Soient A et B deux matrices semi-orthogonales. Montrer que A^T et AB sont semi-orthogonales et calculer $\Delta(A^T)$ et $\Delta(AB)$.
3. Soit A une matrice semi-orthogonale. Montrer que A reste semi-orthogonale si l'on permute ses lignes ou ses colonnes.

Solution **27.** . *Si A est une matrice carrée, $A = (C_1|\cdots|C_n)$, alors $A^TA = (< C_i, C_j >)_{1\leq i,j\leq n}$, donc A est semi orthogonalle ssi la famille des (C_i) forme une famille orthogonale de vecteurs de même norme et alors $\Delta(A) = \|C_i\|^2$.*
Remarquons que $\Delta(A) = 0$ implique alors que $A = 0$.
Enfin, si $A \neq 0$ et $A^TA = \Delta(A)I_n$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta(A)}A^T$ et donc A et A^T commutent, il donc inutile de le supposer.

1. *C'est une conséquence immédiate de la remarque ci-dessus.*
2. *A est semi-orthogonale non nulle si et seulement si $\dfrac{1}{\sqrt{\Delta(A)}}A$ est orthogonale. D'où A^T et AB sont semi-orthogonales et $\Delta(A^T) = \Delta(A)$ ainsi que $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$.*

Exercice 28. *** Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer l'équivalence :

$$(\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|) \iff \exists \omega \in \mathcal{O}(E),\ u = \omega \circ v$$

Solution **28.** . *Le sens $\Leftarrow$ est immédiat. On montre le sens $\Rightarrow$. Notons que $\ker u = \ker v$. Par hypothèse, pour tout $x, y \in E$:*

$$\|u(x+y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(x)\|^2 + 2(u(x)|u(y))$$
$$\|v(x+y)\|^2 = \|v(x)\|^2 + \|v(x)\|^2 + 2(v(x)|v(y))$$

On en déduit que pour tous $x, y \in E$, $(u(x)|u(y)) = (v(x)|v(y))$.
D'où, $u^* \circ u = v^* \circ v = a$. Comme w est un endomorphisme autoadjoint, il est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ telle que $a(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.
Comme

$$(e_i|a(e_i)) = \begin{cases} \lambda_i\|e_i\|^2 \\ (e_i|u^* \circ u(e_i)) = \|u(e_i)\|^2 \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda_i = \|e_i\|^2 \geq 0$. Soit s l'enomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $s(e_i) = \sqrt{\lambda_i}e_i = \|u(e_i)\|e_i$. Par définition $s^2 = a = u^* \circ u$ et s est autoadjoint car orthodiagonalisable, donc

$$s(x)|s(x)) = x|s^2(x)) = (x|a(x)) = (u(x)|u(x)).$$

Soit r le rang de s. On a $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.
On définit φ par $\varphi(s(e_i)) = u(e_i)$ si $i \in [\![1, r]\!]$ et $\varphi(e_i) = (f_i)$ sinon, où $(f_{r+1}, \cdots f_n)$ est une base orthonormée de $(\operatorname{Im} u)^\perp$.
Par définition $\varphi \circ s = u$ et l'image par φ de la base $\mathcal{B}$ orthonomée est encore une base orthonormée puisque

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ (s(e_i)|s(e_j)) = \begin{cases} (u(e_i)|u(e_j)) \\ \\ \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}(e_i|e_j) = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}\delta_{i,j} \end{cases} \quad \text{et } (u(e_i)|u(e_i)) = \lambda_i = \|u(e_i)\|^2 \neq 0.$$

De même, on construit ψ orthogonale telle que $\psi \circ s = v$ et $u = \varphi \circ \psi^{-1} \circ v$. On termine la preuve en posant $w = \varphi \circ \psi^{-1}$.

Exercice 29. ♡** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application Φ_A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in \mathcal{S}_n, \Phi_A(M) = AMA^T$$

On souhaite démontrer que $|\det(\Phi_A)| = |\det(A)|^{n+1}$

1. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$.

2. Montrer que $(M, N) \mapsto \operatorname{Tr}(MN)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   Déterminer l'adjoint de Φ_A pour ce produit scalaire et en déduire le résultat annoncé dans le cas où A est orthogonale.
3. On suppose que A est diagonale, $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Donner une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de Φ_A dans cette base. En déduire que le résultat est vrai si A est symétrique.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, montrer qu'il existe une matrice Q orthogonale et une matrice S symétrique telles que $A = QS$.
   En déduire le résultat annoncé.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la décomposition précédente reste valable et en déduire le résultat annoncé.

<u>*Solution*</u> **29.** .

1. *Calcul immédiat. On fait attention que Φ est bien à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*
2. *On reconnaît la restriction à $\mathcal{S}_n$ du produit scalaire canonique.*

$$\forall M, N \in \mathcal{S}(E),\ (\Phi_A(M)|N) = \operatorname{tr}\left((AMA^T)^T N\right) = \operatorname{tr}\left(AMA^T N\right) = \operatorname{tr}\left(MA^T NA\right) = (M|\Phi_{A^T}(N)).$$

   Donc, $(\Phi_A)^* = \Phi_{A^T}$. Si A est orthogonale, Φ_A aussi

3. $\Phi_A(E_{k,k}) = \lambda_k^2 E_{k,k}$ *et* $\Phi_A(E_{i,j} + E_{j,i}) = \lambda_i\lambda_j(E_{i,j} + E_{j,i})$ *donc φ_A admet une base vecteurs propres* $\left(\dfrac{E_{i,j} + E_{j,i}}{2}\right)_{0 \leq i \leq j \leq n}$ *et la valeur propre associée à* $\dfrac{E_{i,j} + E_{j,i}}{2}$ *est $\lambda_i\lambda_j$. On en déduit que le déterminant est le produit de ces valeurs propres.*

$$\det(\Phi_A) = \prod_{1 \leq i \leq j \geq n} \lambda_i\lambda_j = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{n+1} = (\det A)^{n+1}$$

   car chaque valeur propre λ_i apparaît une fois avec un λ_j pour $i \neq j$ et apparaît une fois au carré. Le résultat est vrai pour les matrices diagonales.
   Si $A = Q^{-1}DQ$ avec Q orthogonale, alors $\det(\Phi_A) = \det(\Phi_D)$ et le résultat est vrai.
4. *Décomposition polaire.*

$$\det(\Phi_A) = \det(\Phi_Q)\det(\Phi_S) = \pm\det(\Phi_S)$$

   d'où le résultat.
5. *Par densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et compacité des matrices orthogonales.*

Espaces euclidiens

(Solutions)