Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

1 Généralités sur les suites

Exercice 1. ♡* Soit u une suite monotone dont une suite extraite est convergente. Montrer que u est convergente.

Solution 1. . Soit $(u_{\rho(n)})$ une suite extraite convergente vers l ; alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\rho(n)} \leq l$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho(n) \geq n$, donc $u_n \leq u_{\rho(n)} \leq l$. La suite (u_n) est donc majorée par l, et comme par hypothèse elle est croissante, on en déduit qu'elle est convergente. Enfin, toute suite extraite d'une suite convergente converge et tend vers la même limite. On en déduit que (u_n) tend vers l.

Exercice 2. ** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que $v_n = 2u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge ssi $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

Solution 2. . Le sens $\Rightarrow$: si $\lim u_n = l$, alors (v_n) est convergente et $\lim v_n = 2l$ (immédiat).
Le sens intéressant est $\Leftarrow$: On veut exprimer u_n en fonction de des v_n. Par récurrence, on peut montrer que

$$u_n = \frac{1}{2}v_{n-1} - \frac{1}{2^2}v_{n-2} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u_0$$

Le terme $\left(-\frac{1}{2}\right)^n u_0$ tend vers 0, on cherche donc la limite de

$$w_n = \frac{1}{2}v_{n-1} - \frac{1}{2^2}v_{n-2} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0.$$

Supposons que $\lim v_n = 3l$. D'après la question précédente, on veut montrer que $\lim w_n = l$.
Remarquez que

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On en déduit que

$$(w_n - l) = \frac{1}{2}(v_{n-1} - 3l) - \frac{1}{2^2}(v_{n-2} - 3l) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 3l) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n l$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n l = 0$, donc pour montrer que (w_n) tend vers l, il suffit de montrer que la suite

$$x_n = \frac{1}{2}(v_{n-1} - 3l) - \frac{1}{2^2}(v_{n-2} - 3l) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 3l)$$

tend vers 0.
On peut séparer la somme comme dans la preuve du théorème de Césaro : pour tout $n \geq N$

$$|x_n| \leq \sum_{k=0}^{N-1}\left|-\frac{1}{2}\right|^{n-k+1}|v_k - 3l| + \sum_{k=N}^{n}\left|-\frac{1}{2}\right|^{n-k+1}|v_k - 3l|$$

On sait que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N,\ |v_n - 3l| \leq \varepsilon.$$

On pose $\max_{k\in[\![0,N-1]\!]}|v_k-3l|=M_N$. *En calculant la somme des termes de la suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$, *on trouve*

$$|x_n|\le M_N\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}+\varepsilon\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\le M_N\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}+\varepsilon$$

Il existe $N'\in\mathbb{N}$, $N>N'$ *tel que pour tout* $n\ge N'$, $M_N\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N}\le\varepsilon$ *et alors* $|x_n|\le 2\varepsilon$. *Quitte à remplacer* ε *par* 2ε, *on a montrer que* (x_n) *tend vers* 0, *ce qui termine la peuve.*

Exercice 3. ** Soit $(a_n)_{n\ge0}$ une suite complexes convergeant vers l. Étudier la convergence de la suite $(b_n)_{n\ge0}$ définie par

$$b_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\ \text{pour}\ \ge 0.$$

<u>Solution</u> **3.** . *On remarque que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$. *Donc si* (a_n) *tend vers* l, *on a*

$$b_n-l=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(a_k-l)\ \text{pour}\ \ge 0.$$

Comme la suite (a_n) *tend vers* l, $\forall\varepsilon>0$, *il existe* $N\in\mathbb{N}$, *tel que* $n\ge N$ *implique* $|a_n-l|\le\varepsilon$.
Donc

$$\begin{aligned}
|b_n-l| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(a_k-l)\right|\\
&\le \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k-l|+\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k-l|\\
&\le \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k-l|+\varepsilon\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\\
&\le \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k-l|+\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\\
&\le M\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}+\varepsilon
\end{aligned}$$

où $M=\max(|a_k-l|,\ k\in[\![0,N-1]\!])$.
De plus, si $n>2N$, *pour tout* $k\in[\![0,N-1]\!]$, $\binom{n}{k}\le\binom{n}{N}$, *donc* $M\times\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\le M\times N\times\binom{n}{N}$.
Enfin, $u_n=\dfrac{1}{2^n}\binom{n}{N}$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$ *car* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+1}{2\times(n-N+1)}$ *tend vers* $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4. ** Montrer que la suite de terme général complexe z_n définie par la relation de récurrence $z_{n+1}=\frac{1}{2}(z_n+|z_n|)$ converge et calculer sa limite (hint : poser $z_n=\rho_n\,e^{i\theta_n}$).

<u>Solution</u> **4.** . *On écrit* $z_n=\rho_n\,e^{i\theta_n}$ *avec* $\theta_n\in]-\pi;\pi]$, $\rho_n\ge0$ *et*

$$\rho_{n+1}e^{i\theta_{n+1}}=\frac{1}{2}\rho_n(1+e^{i\theta_n})=\frac{1}{2}\rho_n e^{i\theta_n/2}(e^{-i\theta_n/2}+e^{i\theta_n/2})=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}e^{i\theta_n/2}.$$

On en déduit que $\theta_{n+1} = \dfrac{1}{2}\theta_n$ *car* $\cos\dfrac{\theta_n}{2} \geq 0$. *D'où* $\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$ *et* (θ_n) *converge vers* 0.
De plus $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$, *donc par récurrence :*

$$\rho_n = \rho_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^n} \quad \text{d'où } \rho_n = \rho_0 \prod_{k=0}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^k}.$$

En appliquant la formule $\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$, *on obtient*

$$\rho_n \sin\frac{\theta_0}{2^n} = \frac{1}{2} \times \rho_0 \times \prod_{k=1}^{n-1} \cos\frac{\theta_0}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rho_0 \sin\theta_0.$$

Remarquons que si $\theta_0 = 0$, *alors pour tout* n $z_n = \rho_0$. *Si* $\theta_0 \neq 0$, *alors*

$$\rho_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rho_0 \frac{\sin\theta_0}{\sin\frac{\theta_0}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}.$$

Finalement (z_n) *converge vers* $\dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$, *si* $\theta_0 \neq 0$.

Exercice 5. * Étudier la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est l'unique racine de $X^n + nX - 1$ dans $[0;1]$. On donnera un développement asymptotique à deux termes.

Solution **5.** . *Faites un tableau de varaiations de la fonction* $g_n(x) = x^n + nx - 1$ *sur* $[0,1]$. *En déduire* s_n *existe et est unique. Remarquez que* $g_n(\dfrac{1}{n})g_n(\dfrac{1}{n+1}) < 0$. *En déduire que* $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
Puis, $u_n = \frac{1}{n} - v_n$ *avec* $0 < v_n < \frac{1}{n(n+1)}$. *On injecte dans l'expression :*

$$\left(\frac{1}{n} - v_n\right)^n + n(\frac{1}{n} - v_n) - 1 = 0 \Rightarrow nv_n = \frac{1}{n^n}(1 - nv_n)^n$$

On en déduit que $n^2 v_n$ *tend vers* 0 *car* $(1 - nv_n)^n$ *est bornée. mais alors* $n\ln(1 - nv_n) \sim n^2 v_n$ *tend vers* 0. *Et donc* $v_n \sim \dfrac{1}{n^{n+1}}$. *Donc* $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o(\frac{1}{n^{n+1}})$.

Exercice 6. ***

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un segment.
2. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0;1]$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi $u_{n+1} - u_n \to 0$.

Solution **6.** .

1. *Supposer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a deux valeurs d'adhérence* a *et* b, $a < b$. *Soit* $c \in]a;b[$. *Faites un dessin et construire une suite qui tend vers* c *: soit le segment* $[a,b]$ *et un point* c *pas trop au milieu.*
Vu qu'il existe une suite extraite qui tend vers a *et une autre qui tend vers* b *on prend* u_n *proche de* a *et* u_{n+p} *proche de* b. *Comme* $u_{n+1} - u_n$ *tend vers* 0, *pour aller de* u_n *à* u_{n+p}, *on fait des pas de plus en plus petit, on prend un indice tel que le pas permet de passer de avant* c *à après* c.
La formalisation : soit $N_0 = 0$, $\varphi(0) = 0$ *et* $n \geq 1$ *et* $\varepsilon_n < (min(|b - c|, |c - a|)/2^n$ *le pas. Il existe* $N_n > N_{n-1}$ *tel que* $n \geq N_n$, $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon_n$. *Soit* $p > max(N_n, \varphi(n-1))$ *tel que* $|U_p - a| < \varepsilon_n$ *et* $q > p$ *tel que* $|U_q - b| < \varepsilon_n$. *On pose* $\varphi(n)$, *le plus grand indice entre* p *et* q *tel que* $u_{\varphi(n)} \leq c$ *: par construction* $c \in [u_{\varphi(n)}; u_{\varphi(n)+1}]$ *et donc* $|c - u_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon_n$. *Enfin,* φ *est strictement croissante, on a bien une suite extraite qui tend vers* c.
L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc un intervalle borné ; de plus, si a *est une extrémité, on montre que pour tout* $n > 0$, *il existe une infinité d'indices* k *tels que* $u_k \in]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$. *On choisit un idice* $\rho(n) > \rho(n-1)$ *et on obtient une suite extraite qui converge vers* a. *L'intrevalle est fermé borné, c'est un segment.*

2. *Le sens intéressant est $\Leftarrow$: d'après l'hypothèse et le 1/ on sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est de la forme $[\alpha,\beta]$. De plus, si a est une valeur d'adhérence, alors il existe $(u_{\rho(n)})$ qui converge vers a et $u_{\rho(n)+1} = f\big(u_{\rho(n)}\big)$ converge vers $f(a)$. Puisque $(u_{\rho(n)+1} - u_{\rho(n)}$ tend vers 0, $f(a) = a$.*
   Si $\alpha < \beta$, comme $(u_{\rho(n)})$ converge vers a, alors il existe N tel que $u_{\rho(N)} \in]\alpha,\beta[$ et donc est un point fixe. On en déduit que la suite u est constante à partir du rang $\rho(N)$ et $\alpha = \beta$, ce qui est absurde. La suite a donc une unique valeur d'adhérence et comme $[0,1]$ est un compact, on sait que la suite est convergente.

Exercice 7. ♡♡** Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_{n+1} = 0$.

1. Soient ε strictement positif, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m_0 : |u_{n+1} - u_n| \leq \epsilon$. Montrer que pour tout réel $a \geq u_{n_0}$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $|a - u_{n_1}| \leq \epsilon$.
2. Rappeler la définition de la densité d'un ensemble dans un espace vectoriel normé.
3. Déduire de la question 1 que l'ensemble $E = \big\{u_n - v_p \mid (n,p) \in \mathbb{N}^2\big\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire :
   (a) La densité de l'ensemble $E = \{\cos(\ln(n)) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ dans un espace que l'on précisera.
   (b) Les valeurs d'adhérence de la suite $n \mapsto \sin(\pi\sqrt{n})$.

Solution **7.** .

1. *L'ensemble $\{k \geq n_0,\ u_k \leq a\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, car contient n_0 et est majorée car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On sait que le maximum existe et on pose $n_1 = \max\{k \geq n_0,\ u_k \leq a\}$. Par définition $u_{n_1+1} > a$. On en déduit $|a - u_{n_1}| \leq |u_{n_1} + 1 - u_n| < \varepsilon$.*
2. *Ω est dense dans $(E, \|\ \|)$ si $\overline{\omega} = E$, c'est-à-dire pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$.*
3. *Avec les notations du 1/ pour tout $b \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $a = b + v_p \geq n_0$ puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = +\infty$. On en déduit qu'il existe n_1 tel que $|a - u_{n_1}| = |b - (u_{n_1} - v_p)| < \varepsilon$.*
4. *(a) On pose $u_n = \ln n$ et $v_n = 2\pi n$ qui remplissent les conditions de l'énoncé. L'ensemble E est dense dans $\mathbb{R}$ et donc $f(E)$ est dense dans $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.*
   (b) On pose $u_n = \pi\sqrt{n}$ et $v_n = 2\pi n$ qui remplissent les conditions de l'énoncé. L'ensemble E est dense dans $\mathbb{R}$ et donc $f(E)$ est dense dans $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$. Mais ici, on demande les valeurs d'adhérence : pour tout $a \in [-1,1]$, il faut construire une suite extraite $(u_{\rho(n)})$ qui converge vers a. Pour cela, on procède par récurrence en remarquant que si $a \neq 1$, pour tout $p > 0$, $]a, a + \frac{1}{n}[\cap f(E)$ contient une infinité d'éléments : sinon, le minimum y existe et $]a, y[\cap f(E) = \emptyset$, ce qui contredit la densité de $f(E)$ dans $[-1,1]$. Donc on prend $\rho(0)$ tel que $u_{\rho(0)} \in]a, a+1[$ et si $\rho(n)$ est tel que $u_{\rho(n)} \in]a, a + \frac{1}{n}[$, alors il existe une infinité d'indice k tel que $u_k \in]a, a + \frac{1}{n+1}[$. On peut donc choisir $\rho(n+1) > \rho(n)$ tel que $u_{\rho(n+1)} \in]a, a + \frac{1}{n+1}[$.
   On construit ainsi l'extractrice et par construction $(u_{\rho(n)})$ converge vers a.
   Si $a = 1$, on procède de même avec $]a - \frac{1}{n}, a[$.
   Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence est bien $[-1,1]$.

Exercice 8. *** *Suites presque monotones.*

1. Soit (u_n) une suite de nombres complexes, et σ un permutation de $\mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge ssi $u_{\sigma(n)}$ converge.
2. Quelles sont les suites réelles (u_n) telles qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la suite $u_{\sigma(n)}$ soit monotone à partir d'un certain rang ?

Solution **8.**

1. *Par définition, la suite* (u_n) *converge* l *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n > N$ *alors* $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
Si σ *est une permutation de* $\mathbb{N}$, *on pose* $N' = \max \sigma^{-1}([\![0, N]\!])$ *et pour* $n > N'$, $\sigma(n) > N$ *et donc* $|u_{\sigma(n)} - l| \leq \varepsilon$. *Ce qui montre que* $(u_{\sigma(n)})$ *converge aussi vers* l. *Une preuve similaire montre que si* (u_n) *réelle et tend vers* $\pm\infty$, *alors* $(u_{\sigma(n)})$ *tend vers* $\pm\infty$.
Réciproque : fait le même raisonnement avec σ^{-1}.
2. *Si* (u_{σ_n}) *est monotone à partir d'un certain rang* N, *alors la suite a une limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* (u_n) *tend aussi vers* l *d'après le 1/. On suppose la suite croissante : alors pour tout* $n \geq N$, $u_{\sigma(n)} \leq l$. *Il existe au plus* N *indices* i *tels que* $u_i > l$. *Enfin, s'il existe un nombre inifini d'indice* i *tels que* $u_i = l$, *alors la suite* $u_{\sigma(n)})$ *est constante à partir d'un certain rang, et donc* (u_n) *aussi. Donc si* (u_n) *n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang, alors l'ensemble des indices* i *tels* $u_i \geq l$ *est de cardinal fini. Si la suite était décroissante, on aurait un nombre fini d'indices tels que* $u_i \leq l$.
Réciproquement : on suppose (u_n) *non stationnaire à partir d'un certain rang (cas simple) ; si* (u_n) *a une limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *et si* $K = \{i, u_i \geq l\}$ *(resp.* $K' = \{i,\ u_i \leq l\}$*) est de cardinal fini* α, *alors on choisit* σ *qui induit une bijection entre* $[\![0, \alpha - 1]\!]$ *et* J, *puis par récurrence forte* $\sigma(m)$ *est choisi tel que* $u_{\sigma(m)} = \min(u_{\sigma(j)},\ j \in \mathbb{N} \setminus \sigma([\![0, m-1]\!])$ *(resp.* $\max$*) et* $\sigma(m)$ *le plus petit indice possible. Comme la suite admet* l *comme seule limite,* $(u_{\sigma(j)},\ j \in \mathbb{N} \setminus \sigma([\![0, m-1]\!])$ *est bien minorée (sinon, on a sous-suite qui tend vers* $-\infty$*) et le minimum existe, sinon, on aurait une sous suite strictement décroissante et minorée, donc convergente vers* $l' < l$. *De plus, La suite ainsi construite est croissante donc admet une limite, qui ne peut être que* l *par hypothèse. Il reste à montrer que* σ *est surjective : suppposons que* $n \notin \sigma(\mathbb{N})$, *alors par construction pour tout* k, $u_{\sigma(k)} \leq u_n < l$ *et en passant à la limite* $l < l$, *ce qui est impossible.*

Exercice 9. Calculer la limite des sommes (séries) suivantes :

1. $s_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$;
2. $t_n = \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \times \cdots \times (1 + \frac{n}{n})}$;
3. $u_n = \ln(1 + \dfrac{\pi}{n}) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1 + \cos(3k/n)}$.

<u>*Solution*</u> **<u>9.</u>** . *Ce sont des sommes de Riemann. Tiercé gagnant :* $\frac{\pi}{8}$, $\frac{4}{e}$, $\frac{\pi}{3} \tan \frac{3}{2}$.

<u>Exercice 10.</u> Calculer

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^k \cos \frac{k\pi}{p} \quad \text{puis} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x},$$

lorsque ces expressions sont bien définies.

<u>*Solution*</u> **<u>10.</u>** . *Indication générale : se ramener à des sommes de complexes du type* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$. *Rappel de cours : On pose* $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(a + bk)$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(a + bk)$ *et* $T_n = C_n + iS_n$. *On a* $\mathrm{Re}\,(T_n) = C_n$ *et* $\mathrm{Im}\,(T_n) = S_n$. *Puis on calcule*

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n} (e^{ib})^k = e^{ia} \frac{1 - e^{i(n+1)b}}{1 - e^{ib}} = e^{ia} \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}b}}{e^{i\frac{b}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(n+1)}{2}b} - e^{i\frac{(n+1)}{2}b}}{e^{-i\frac{b}{2}} - e^{i\frac{b}{2}}}$$

et finalement

$$T_n = e^{i\left(a + \frac{n}{2}b\right)} \frac{\sin \frac{n+1}{2}b}{\sin \frac{b}{2}} = \cos\left(a + \frac{n}{2}b\right) \frac{\sin \frac{n+1}{2}b}{\sin \frac{b}{2}} + i \left(a + \frac{n}{2}b\right) \frac{\sin \frac{n+1}{2}b}{\sin \frac{b}{2}}$$

d'oú les valeurs de C_n *et* S_n.

1/ En particulier, si $a=0$ et $b=\dfrac{\pi}{p}+\pi$, alors C_n s'écrit

$$\sum_{k=1}^{p}\cos\left(\frac{k\pi}{p}+k\pi\right)=\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{p},$$

car $\cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{Z}$. On trouve alors facilement la valeur de l'expression demandée.

2/ De même, on calcule

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}+i\frac{\sin kx}{\cos^k x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k x}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}=\frac{1-\dfrac{e^{inx}}{\cos^{n+1}x}}{-i\dfrac{\sin x}{\cos x}}.$$

l'avant dernière égalité étant la sommes des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{e^{ix}}{\cos x}$.
Pour terminer le calcul, on prend la partie rélle et la partie imaginaire de T_n et on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x}\ \text{ et }\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x}=\frac{\cos^{n+1}x-\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x},$$

lorsque ces expressions sont bien définies.

Exercice 11. * Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

1. $2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
2. $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$
3. $\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}$

Solution **11.** .

1. $2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}(2-\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})$.

Or, $(1+x)^\alpha+(1-x)^\alpha=2\times\left(1+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2\right)\sim\alpha(\alpha-1)x^2$.

On en déduit que $2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\sim\dfrac{1}{4n\sqrt{n}}$

2. $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\dfrac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)}\sim\dfrac{1/n}{1/2n^{3/2}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

3. On calcule

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}&=\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}-\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}\\&=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\dfrac{\ln n}{n}}-1\right]\\&\sim\frac{\ln(n+1)}{n+1}-+\frac{\ln n}{n}\\&=\frac{\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n}{n(n+1)}\\&\sim-\frac{\ln n}{n^2}\end{aligned}$$

Exercice 12. * Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes et un équivalent, si nécessaire :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}$
2. $u_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$
3. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Solution **12.** . *1.* $u_n = n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)} \sim n\sqrt{\dfrac{1}{n^2+1}} \sim 1.$

2. $u_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\right].$

Or $n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \sim n\sin\dfrac{1}{n} \sim n\times\dfrac{1}{n} \sim 1.$

Par continuité de la fonction exponentielle, on a $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \sim e.$

3. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n}} \sim \dfrac{\exp\left(\sqrt{n+1}\ln n\right)}{n^{3/2}} = \exp\left(\left[\sqrt{n+1}-3/2\right]\ln n\right).$

Puis, $\exp\left(\left[\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-3/2\right]\ln n\right) \sim \exp\left(\left[\sqrt{n}(1+O(\frac{1}{n}))-3/2\right]\ln n\right) \sim \exp([\sqrt{n}-3/2]\ln n).$

Donc la limite de (u_n) *vaut* $+\infty$.

Exercice 13. ** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs, et u_0 un nombre réel strictement positif. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+a_n}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ sont simultanément convergentes.

Solution **13.** . *Pour tout* $k\geq 0$, $u_k>0$ *(récurrence immédiate) et*

$$\begin{aligned} a_k &= (2u_{k+1}-u_k)^2 - u_k^2 \\ &= 4u_{k+1}\left(u_{k+1}-u_k\right) \end{aligned}$$

Comme par hypothèse, $a_n\geq 0$*, on en déduit que la suite* (u_n) *est croissante. De plus,*

$$0 \leq u_0\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) \leq S_n \leq u_{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)$$

En simplifiant les sommes télescopiques

$$0 \leq u_0(u_{n+1}-u_0) \leq S_n \leq u_{n+1}(u_{n+1}-u_0).$$

Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge, l'inégalité partie droite montre que* (S_n) *est bornée, et comme série à termes positifs, est convergente. Si* (S_n) *converge, alors la partie gauche de l'inégalité montre que* (u_n) *est majorée, et comme elle est de plus croissante, on en déduit qu'elle est convergente. Ce qui termine la démonstration.*

2 Suites récurrentes

Exercice 14. ♡* Soit la suite (u_n) de terme générale tel que $u_0>0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2}.$$

1. Etudier la convergence de (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
3. En considérant la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$ trouver un équivalent de (u_n).

<u>*Solution*</u> **14.** .

1-2 On commence par étudier pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+nx^2}$ est dérivable et

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

On en déduit que f_n admet son maximum absolu en $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
De plus, f est strictement croissante sur $[0, \dfrac{1}{n}]$ et donc est majorée par $\dfrac{1}{n+1}$ sur cet intervalle.
Montrons par récurrence que pour $n \geq 2$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et que (u_n) est décroissante.
Initialisation : on calcule $u_1 = u_0 > 0$ et $u_2 \in f(\mathbb{R}_+^*) =]0, \dfrac{1}{2\sqrt{1}}] =]0, \dfrac{1}{2}]$. De plus, $\dfrac{u_2}{u_1} < 1$ donc, $u_2 < u_1$.
On suppose que la suite est décroissante jusqu'au rang n et que $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
D'après l'étude de f_n on en déduit que $u_{n+1} = f_n(u_n) \in]0, \dfrac{1}{n+1}]$. De plus, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+nu_n^2} < 1$, donc $u_{n+1} < u_n$. Ce qui termine la récurrence.

3 On utilise la technique de lemme de l'escalier. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = nu_n$. Il faut montrer que (v_n) admet une limite finie non nulle. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^n$, $v_n \geq 0$, car (u_n) est décroissante postive. Puis, (v_n) est croissante pour $n \geq 2$ car

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{(n+1)u_n}{1+nu_n^2} - u_n \\ &= u_n \times \frac{1-n^2u_n^2}{1+nu_n^2} \end{aligned}$$

et comme $u_n \in]0, \dfrac{1}{n}]$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
La suite (u_n) n'est pas constante car $u_n \in]0, \dfrac{1}{n}]$, donc la suite (v_n) n'est pas la suite nulle. Enfin, la suite $(v_n = nu_n)$ est majorée par 1 car $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$. On en conclut que la suite (v_n) est convergente et converge vers $a > v_0 = 0$.
On somme entre 0 et n : du premier côté c'est équivalent à $\dfrac{1}{u_{n+1}} \sim \dfrac{n}{a}$ et de l'autre par Césaro à an, donc $a = 1$.

<u>Exercice 15.</u> * Soit $u_0 \in]0; \frac{1}{2}[$ et $u_{n+1} = (1-u_n)u_n$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$.
3. En considérant la suite $(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n})$, trouver un équivalent de (u_n).

<u>*Solution*</u> **15.** .

1. *La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$, donc $u_{n+1} \in]0, f(u_n)[$. De plus, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n \leq \frac{1}{2}$, la suite est décroissante et tend vers 0.*
2. *Par récurrence, pour $n = 0$, on a $u_0 < \dfrac{1}{2} < 1$, puis si $u_n < \dfrac{1}{n+1}$, alors $0 < u_{n+1} < f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{n}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+1}$.*
3. *On calcule*
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1-u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
On en déduit par Césaro, lemme de l'escalier ou encore par sommation des équivalents que $\dfrac{1}{u_n} \sim n$. Finalement, $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 16. ** Trouver les applications de $[0; +\infty[$ dans lui-même telles que
$$\forall x \geq 0, \quad f \circ f(x) = 6x - f(x).$$

Solution **16.** . *On a une solution évidente : $g(x) = 2x$. On montrer que c'est la seule : Soit $x \geq 0$ et on étudie la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 = x$: $x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1}$. On en déduit que $x_n = A\,2^n + B\,(-3)^n$. Mais comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a nécessairement $B = 0$ et $x_n = 2^n x$. En particulier, $f(x) = 2x$.*

Exercice 17. ** Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et admettant un développement limité en 0 de la forme :
$$f(x) = x + \lambda x^k + o(x^k)$$
avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ et $\lambda \neq 0$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par sa valeur initiale u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et converge vers 0. Montrer que u_n est de signe constant pour n assez grand et que l'on a
$$|u_n| \sim \frac{1}{((k-1)|\lambda|)^{\frac{1}{k-1}}} \times \frac{1}{n^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Solution **17.** . *On est dans le cas où $f'(0) = 1$, la convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$ est lente. On a le développement :$|u_{n+1}| = |u_n|(1 + \lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1}))$ pour n assez grand. On calcule pour $r > 0$*
$$\frac{1}{|u_{n+1}|^r} - \frac{1}{|u_n|^r} = \frac{1}{|u_n|^r} \times \frac{-r\lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1})}{1 + r\lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1})}.$$
Cette suite admet une limite finie non nulle si on a $r = k-1$. Dans ce cas, la limite est nécessairement positive, sinon $\dfrac{1}{|u_n|^r}$ tendrait vers $-\infty$. On en déduit qu'elle vaut $(k-1)|\lambda|$. Et on conclut avec le lemme de l'escalier.

Exercice 18. $\heartsuit$* *(Un calcul asymptotique)*
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une unique solution en x de $\tan x = x$ dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On la notera x_n.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. On pose $x_n = n\pi + y_n$. Calucler $\tan x_n$ et en déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. Recommencer autant que nécessaire pour montrer que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Solution **18.** .

1. *Il suffit de remarquer que la fonction* $g(x) = \tan x - x$ *est continue sur* $]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$ *et en* $n\pi - \frac{\pi}{2}^+$ *g a pour limite* $-\infty$ *de même qu'en* $n\pi - \frac{\pi}{2}^-$ *sa limite est* $+\infty$. *Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que g s'annule en un point* $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}[$. *De plus* $g'(x) = \tan^2 x > 0$ *et donc est strictement croissante ; ainsi* x_n *est uniquement déterminé.*
2. *On a* $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, *et en divisant par* $n\pi$, *on vérifie facilement que* $\frac{x_n}{n\pi}$ *converge vers* 1, *c'est-à-dire que* $x_n \sim n\pi$.
3. *On pose* $x_n = n\pi + y_n$. *Alors* $\tan(y_n + n\pi) = \begin{cases} n\pi + y_n \\ \tan y_n \end{cases}$ *(car* $\tan(a + \pi) = \tan a$*). Donc* $\tan y_n$ *tend vers* $+\infty$ *quand n tend vers* $+\infty$. *Par continuité, on en déduit que* y_n *converge vers* $\frac{\pi}{2}$ *puisque* $y_n \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, *et donc* $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ *converge vers* 0. *Ce qui par définition s'écrit* $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. *Comme suggérer dans l'énoncé, on recommence deux fois pour obtenir le résultat désiré :*

   i) On pose $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$, *et* $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n) = \begin{cases} n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \\ -\operatorname{cotan} z_n \end{cases}$ *(car* $\tan(a + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotan} a$*).*
   Donc $\sin z_n = \dfrac{\cos z_n}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n}$, *mais* (z_n) *tend vers* 0, *d'où* $z_n \sim \sin z_n \sim -\dfrac{\cos z_n}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \sim \dfrac{-1}{n\pi}$. *Ce qui est équivalent à* $z_n + \frac{1}{n\pi} = o(\frac{1}{n\pi}) = o(\frac{1}{n})$.
   On en déduit bien que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$

   ii) On recommence en posant $z_n = \frac{1}{n\pi} + t_n$ *: on reprend l'égalité* $\sin z_n = -\dfrac{\cos z_n}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n}$ *et on calcule des développements en* $o(\frac{1}{n^2})$ *:*
   Tout d'abord
   $$\sin(\frac{1}{n\pi} + t_n) = \frac{1}{n\pi} + t_n + o(\frac{1}{n^2}) \quad \text{car} \quad \sin z = z + o(z^2) \text{ et } t_n = o(\frac{1}{n}).$$
   Ensuite $\cos(\frac{1}{n\pi} + t_n) = 1 + o(\frac{1}{n})$ *car* $\cos z = 1 + o(z)$ *et*
   $$\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n} = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = \frac{1}{n\pi}(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2}).$$
   Et on obtient finalement on obtient le résultat désiré :
   $$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

3 Généralités sur les séries

Exercice 19. ♡* On considère une suite décroissante de réels positifs (a_n) telle que la série correspondante $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la suite (na_n) converge vers 0.
La réciproque est-elle vraie ?

Solution **19.** *. La suite* (S_n) *est convergente, donc* $S_{2n} - S_n$ *tenv ders* 0 *:* $\forall \varepsilon$, $\exists N$ *tel que si* $n > N$,
$$\varepsilon > |S_{2n} - S_n| = a_{2n} + \cdots + a_{2n-1} \geq na_{2n}$$
puisque (a_n) *à termes positifs et décroissante et donc* $(\dfrac{n}{2}a_n)$ *tend vers* 0, *d'où le résultat.*
La réciproque est fausse : $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ *diverge : de même nature que* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Exercice 20. * Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs telle que la série $\sum a_n^2$ est convergente. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui même.

1. Montrer que la série $\sum a_n a_{\sigma(n)}$ est convergente.
2. Pour quelle(s) permutation(s) la somme est maximale.

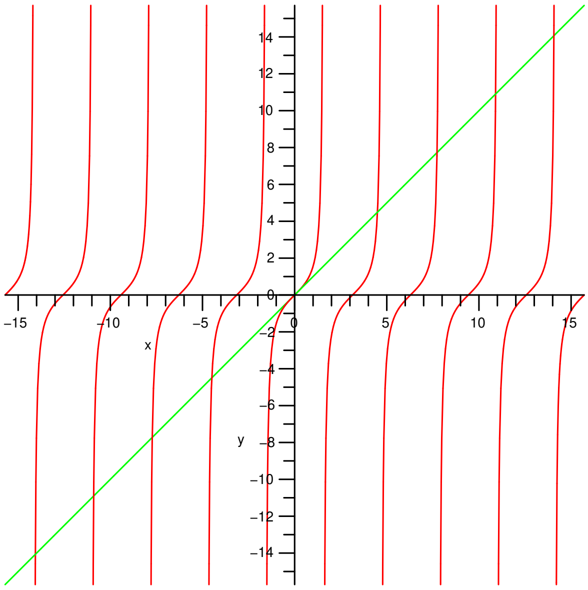

FIGURE 1 – Illustration du calcul : la fonction tan et la droite $y = x$ sont représentées

Solution **20.** . *On écrit que* $a_n a_{\sigma(n)} \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + a_{\sigma(n)}^2)$ *et on majore les sommes partielles par* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ *et on a égalité ssi* $a_n = a_{\sigma(n)}$*, c'est-à-dire ssi* $a_n \mapsto a_{\sigma(n)}$ *est l'identité.*

Exercice 21. ♡** Soit $\sum u_n$ une série convergente de l'evn E, et σ une permutation de $\mathbf{N}$ telle que $\sigma(n) - n$ est bornée. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge de même somme que $\sum u_n$.

Solution **21.** . *On suppose* $\sigma(n) - n$ *est bornée par* M*.Donc pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $n > N > M$ *tel que* $|u_n| < \varepsilon$*. Comme*

$$[\![0, n - M]\!] \subset \sigma([\![0, n]\!]) \subset [\![0, n + M]\!],$$

on en déduit que $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\right| \leq \sum_{k=n-M}^{n+M} |u_k| \leq (2M + 1)\varepsilon$*. Et donc les deux sommes de même nature et si elles convergent, elles ont même limite.*

Exercice 22. ** Soit $\sum u_n$ une série telle que, pour toute suite convergente v_n, la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge absolument.

Solution **22.** . *Procédons par contraposée : supposons que* $\sum u_n$ *n'est pas absolument convergent. On construit par récurrence une extractrice* ρ *telle que* $\sum_{k=\rho(n)}^{\rho(n+1)-1} |u_k| > n$ *et pour* $k \in [\![\rho(n), \rho(n+1) - 1]\!]$*, on pose* $v_k = \frac{\operatorname{sgn}(u_k)}{n}$*. La suite* v_k *tend vers* 0 *et par construction* $\sum_{k=\rho(n)}^{\rho(n+1)-1} u_k v_k > 1$ *et donc la série* $\sum u_n v_n$ *est divergente.*

Exercice 23. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, dx$ converge. Montrer que la suite

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(x)dx$$

converge. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ont même nature.

Solution **23.** . *Si* $v_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx$ *alors* $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
Une intégration par parties dans l'expression de v_k *donne*

$$v_k = f(k) - [(x-(k+1))f(x)]_k^{k+1} + \int_k^{k+1}(x-(k+1))f'(x)dx = \int_k^{k+1}(x-(k+1))f'(x)dx$$

donc $|v_k| \le \int_k^{k+1}|x-k-1|\,|f'(x)|\,dx \le \int_k^{k+1}|f'(x)|\,dx$.
Ainsi, $\sum_k v_k$ *est absolument convergente et donc la suite* $(\alpha_n)_n$ *converge.*
On en déduit que les limites de $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ *et* $\int_0^{n+1} f(x)\,dx$ *ont même nature.*
Il reste à vérifier que si la série est convergente, alors $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$ *existe. En effet*

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^{\lfloor x\rfloor} f(x)\,dx + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)dt.$$

De plus, $f(x) = \int_0^x f't)\,dt + f(0)$. *L'intégrale de* f' *est absolument convergente, donc converge et* f *admet une limite en* $+\infty$, *qui ne peut être que* 0 *car la série* $\sum_k f(k)$ *est supposée convergente.*
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $A \in \mathbb{R}$, $x > A$ *implique* $|f(x)| \le \varepsilon$ *; en intégrant :* $|\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)dt| \le \int_{\lfloor x\rfloor}^x |f(t)|dt \le \varepsilon$. *Par définition, on a montré que* $\lim_{x\to+\infty}\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)dt = 0$.

4 Comparaisons

Exercice 24. ♡* Nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1} + \frac{1}{n}(\alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

suivant les valeurs de α, β et γ des réels.

Solution **24.** . *Calculer un dévelopement asymptotique de* u_n *:*

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = 1 + \frac{1}{e^{1/n}-1} = 1 + n \times \frac{1}{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= 1 + n\times\left(1 - (\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}) + (\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})^2 - (\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})^3 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

On trouve $u_n = (1+\alpha)n + (\frac{1}{2}+\beta) + (\frac{1}{12}+\gamma)\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.
La série est convergente ssi $\alpha = -1$, $\beta = -\frac{1}{2}$ *et* $\gamma = -\frac{1}{12}$.

Exercice 25. (*,**,**,***)Étudier les séries de terme général :

$$a)\ u_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-1/6} \quad b)\ u_n = \sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right] \quad c)\ u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^a},\ a\in\mathbb{R} \quad d)\ \sin(\pi e n!)$$

Solution **25.** . *a) On calcule* $n^2 \ln n \sin \dfrac{1}{n} = n^2 \ln(1 - \dfrac{1}{6n^2} + O(\dfrac{1}{n^4})) = -\dfrac{1}{6} + O(\dfrac{1}{n^2})$. *On écrit*

$$u_n = e^{-1/6}\left(\exp\left[O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right] \sim O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc la série converge.
b) On écrit

$$(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\left[\sqrt{3}^k(-1)^k + \sqrt{3}^k\right] = 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k = 2N$$

donc $u_n = \sin\left[\pi(2N - (2-\sqrt{3})^n)\right] \sim -(2-\sqrt{3})^n \pi$ *donc converge absolument.*
c) écrire $u_n = \exp(-n^a \ln(1+\frac{1}{n}) = \exp(-n^{a-1} + O(n^{a-2})$ *; si* $a \leq 1$ *la série diverge grossièrement et si* $a > 1$, *alors*

$$\lim n^2 u_n = \lim\left(n^2 \exp(-\frac{n^{a-1}}{2})\right)\left(\exp(-\frac{n^{a-1}}{2} + O(n^{a-2})\right) = 0$$

et donc la série à termes positifs converge car est un $O(1/n^2)$.
d)On a $u_n = \sin\left(\pi\left[n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + n!R_n\right]\right)$. *Or*

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = n! + \frac{n!}{1} + \cdots + \frac{n!}{(n-2)!} + n(n-1) + n + 1 = 2N + n + 1 \Rightarrow u_n = (-1)^{n+1}\sin n!R_n\pi$$

Montrons que $n!R_n$ *est décroissante (positive) et tend vers* 0 *: pour cela*

$$\frac{1}{n+1} < n!R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{n}$$

d'où $n!R_n \leq \frac{1}{n} \leq (n-1)!R_{n-1}$. *La série est une série alternée, donc converge.*

Exercice 26. ♡* Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2n^3+1}{n!}$.

Solution **26.** . *On vérifie que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{1}{n}$ *donc la série converge.*
On écrit $2n^3 + 1 = 2n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 2n + 1$, *d'où*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2n^3+1}{n!} = 2\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 6\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{3}{(n-2)!} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} + +\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 11e$$

et $\sum u_n = 11e$.

Exercice 27. ♡♡** Étudier la nature des séries de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)$ et $v_n = \sin(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n})$.
Solution **27.** . *On calcule*

$$n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -n^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = -n - \frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum u_n$ *converge, comme somme d'une série alternée convergente et d'une série absolument convergente.*
On calcule

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n} &= 2\pi n\left[1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]^{1/2} \\ &= 2\pi n\left[1+\frac{(-1)^n}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \\ &= 2n\pi+\frac{(-1)^n\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $v_n = \sin\left[2n\pi+\frac{(-1)^n\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = \frac{(-1)^n\pi}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$*, somme d'une série alternée convergente et d'une série absolument convergente, donc converge, mais pas absolument.*

Exercice 28. $\heartsuit$* Étudier la série de terme général $u_n = \frac{n!}{a^n n^n}$, $a \in \mathbb{R}_*$.

Solution **28.** **.** *On calcule*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{|a|}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{|a|}\times\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{|a|}\exp\left[-n\ln(1+\frac{1}{n})\right].$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{e|a|}$*. Le critère de D'Alembert, montre que si* $|a| > \frac{1}{e}$*, alors la série converge absolument et si* $a \geq \frac{1}{e}$*, alors* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ *car* $\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$*. Dans ce dernier cas, la série est grossièrement divergente. Donc* $\sum u_n$ *converge ssi* $|a| > \frac{1}{e}$*.*

Exercice 29. $\heartsuit$** Nature de la série de terme général $u_n = \arccos(\frac{2}{\pi}\arctan n^2)$.

Solution **29.** **.** *On se rappelle que pour tout* $x > 0$*,* $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$*. La suite peut ainsi s'écrire* $u_n = \arccos\left(1-\frac{2}{\pi}\times\arctan\frac{1}{n^2}\right)$*.*
On étudie $\cos u_n$*. En effet,* $\cos(u_n) = 1-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{n^2}$ *qui tend vers 1, donc* $1-\cos(u_n) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{n^2}$ *donne* $\frac{u_n^2}{2}\sim\frac{2}{\pi n^2}$ *et* $u_n \sim \frac{2}{n\sqrt{\pi}}$ *; la série diverge. Étudier* $\cos u_n$*.*
On a cos$(u_n) = 1-\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{n^2}$ *qui tend vers 1, donc* $1-cos u_n = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{n^2}$ *donne* $\frac{u_n^2}{2}\sim\frac{2}{\pi n^2}$ *et* $u_n\sim\frac{2}{n\sqrt{\pi}}$ *; la série diverge.*

5 Autres

Exercice 30. $\heartsuit$* On fixe $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = (u_n - u_n^2)/2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si $a \in]-1;2[$.
2. Montrer que la suite (u_n) prend la valeur 0 ssi $a = 0$ ou $a = 1$.
3. On fixe $a \in]-1;2[\backslash\{0,1\}$. Calculer la limite du rapport $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et en déduire que la série de terme général u_n converge ssi $a \in]-1;2[$.

Solution **30.** **.**

1. *La suite est de la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$ *avec* $f(x) = \frac{x-x^2}{2}$ *et* $g(x) = f(x)-x = -\frac{x+x^2}{2}$*. la fonction* g *est positive sur* $[-1,0]$ *et négative sinon.*
Les variations de f *sont*

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
f'			$\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		0		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

L'image par f de $]2,+\infty[$ est $]-\infty,-1[$ qui est un intervalle stable. la fonction g est alors négative, donc (u_n) décroissante, elle ne peut converger car f n'admet pas de point fixe <-1. La suite (u_n) tend donc vers $-\infty$ pour $a \in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$.
Si $a=-1$, alors la suite est constante et si $a=2$, alors la suite est constante à partir du rang 1.
Si $a \in]-1,0]$ intervalle stable de f et sur lequel $g \geq 0$, la suite (u_n) est croissante et converge car bornée vers l'unique point fixe >1, donc vers 0.
De même, si $a \in [1,2[$, $u_1 \in]-1,0]$ et la suite converge vers 0. Enfin, si $a \in [0,1]$, alors l'intervalle est stable par f et g est négative sur cette intervalle, la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0.

2. *Le tableau de variations montre que 0 est atteint en 0 et 1 et que 1 n'est pas atteint, d'où le résultat.*
3. *La suite (u_n) tend vers 0, $u_n \neq 0$ et à partir d'un certain rang*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1-u_n}{2}$$

qui tend vers $\dfrac{1}{2}$. Le critère de D'Alembert s'applique.

Exercice 31. *

1. (a) Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^{i} \ln t\,dt \leq \ln i \leq \int_{i}^{i+1} \ln t\,dt.$$

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_{1}^{n} \ln t\,dt \leq \ln(n!) \leq \int_{1}^{n} \ln t\,dt + \ln n.$$

2. Pour tout $x>0$, calculer $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt$.
3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution **31.** **.**

1. *(a) Soit $t \in [i-1,i]$. Alors, puisque la fonction logarithme est croissante, on a*

$$\ln(t) \leq \ln(i).$$

On intègre cette inégalité pour t parcourant $[i-1,i]$:

$$\int_{i-1}^{i} \ln(t)dt \leq \int_{i-1}^{i} \ln(i)dt = (i-(i-1))\ln(i) = \ln(i).$$

La deuxième partie de l'inégalité se prouve exactement de la même façon, en remarquant que pour tout t dans $[i,i+1]$, on a

$$\ln(i) \leq \ln(t).$$

(b) On commence par sommer l'inégalité de droite pour i allant de 2 jusqu'à n. Par la formule de Chasles, le membre de droite est

$$\int_{1}^{2} \ln(t)dt + \int_{2}^{3} \ln(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^{n} \ln(t)dt = \int_{1}^{n} \ln(t)dt.$$

Le membre de gauche vaut lui

$$\sum_{i=2}^{n} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^{n} i\right) = \ln(n!).$$

On somme ensuite la seconde inégalité pour i *allant de* 2 *à* $n-1$*. On trouve*

$$\ln\big((n-1)!\big) \leq \int_2^n \ln(t)dt \leq \int_1^n \ln(t)dt,$$

puisque la fonction $\ln$ *est positive sur* $[1,2]$*. Il suffit ensuite d'ajouter* $\ln(n)$ *de chaque côté de l'inégalité pour obtenir le résultat demandé.*

2. *On réalise une intégration par parties, écrivant* $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$*, d'où*

$$F(x) = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}dt = x\ln x - x + 1.$$

3. *Des deux questions précédentes, on tire*

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n\ln n + \ln n - n + 1$$

soit encore

$$1 + \frac{-n+1}{n\ln n} \leq \frac{ln(n!)}{n\ln n} \leq 1 + \frac{\ln n - n + 1}{n\ln n}.$$

Par le théorème d'encadrement des limites, $\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$ *tend vers 1 quand* n *tend vers* $+\infty$*. Ceci signifie bien que* $\ln(n!)$ *est équivalent à* $n\ln(n)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$*.*

Exercice 32. * Calculer la sommes des séries suivantes après avoir justifier leur convergence :

$$1/\sum \frac{1}{n(n+1)}, \quad 2/\sum \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \quad 3/\sum \frac{2n-1}{n(n^2-4)}.$$

Solution **32.** . *Pour le 1/,* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ *donc la série est téléscopique, elle converge de somme le premier terme : 1.*
Pour le 2/, c'est le même principe :

$$\sum \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n-1} + \frac{1/2}{n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right)$$

somme de deux suites téléscopiques, donc converge, La somme est la différence des deux premiers termes (la somme commence à $n = 3$ *!) :* $\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$*.*
Le principe reste le même pour le 3/ :

$$\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{1/4}{n} + \frac{3/8}{n-2} + \frac{-5/8}{n+2} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

donc $\sum u_n$ *est une somme de 4 séries téléscopiques !*

Exercice 33. ♡* Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la série harmonique.

Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$ en fonction H_{2n} et $\frac{1}{2}H_n$ et en déduire que $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{k(2k+1)} = 2(1 - \ln 2)$.

Solution **33.** . *On trouve* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - 1 + \frac{1}{2n+1}$.

On montre que $\frac{1}{k(2k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-2}{2k+1}$, *d'où*

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)} = H_n - 2S_n = \ln n + \gamma + o(1) - 2(\ln 2 - 1 + \frac{1}{2}\gamma + o(\frac{1}{n}) = 2(1 - \ln 2),$$

où l'on a utilisé $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, γ *la constante d'Euler.*

Exercice 34. **

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et $c > 0$.
   Montrer que la suite u_n converge vers une limite l et on a $u_n - l \sim \frac{-c}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. Rappeler la démonstration de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$
   (a) Poser $v_n = H_n - \ln n - \gamma$ et calculer un dl de $v_{n+1} - v_n$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.
   (b) Poser $w_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$ et calculer un dl de w_n et recommencer... en déduire
   $$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + o(\frac{1}{n^6})$$

Solution **34.** .

1. *C'est du cours : On sait que si* $v_n \sim w_n$ *des séries à termes constants et si* $\sum_n w_n$ *converge, alors les restes* $\sum_{k\geq n+1} v_k \sim \sum_{k\geq n+1} u_k$.
   Mais si $v_n = (u_{n+1} - u_n)$ *alors* $\sum_{k=n+1}^{N} v_k = u_{N+1} - u_{n+1}$. *Comme* $\lim u_n = l$, *on en déduit que* $\sum_{k\geq n+1} v_k = l - u_{n+1}$. *D'autre part, le reste d'une série de Riemann convergente est équivalent à* $\frac{1}{\alpha-1}n^{\alpha-1}$. *On en déduit le résultat.*
2. *On pose* $u_n = H_n - \ln n$ *et on calcule* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n})$.
   Le développement en 0 : $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *nous donne* $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
   On sait donc que $\sum u_{n+1} - u_n$ *converge vers un réel* γ *et que le 1/ nous dit que* $v_n = u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$, *d'où le résultat.*
3. *On recommence avec*
   $$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= -\ln(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} \\ &= -\ln(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$
   Et le développement en 0 *de* $-\ln(1+x) + \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ *en* 0.
   On en déduit que $w_n \sim -\frac{1}{12n^2}$

4. On continue...

Exercice 35. ♡* Calculer de deux manières différentes $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$ (avec un produit de Cauchy ou une série géométrique).

<u>*Solution*</u> **35.** . *Méthode rapide : Calculer* $\sum_{k=0}^{n} x^k$*, puis dériver les deux expressions et appliquer le résultat à* $x = 1/3$.
Avec le produit de Cauchy : $\sum_{k=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right)$.

Exercice 36. * Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

<u>*Solution*</u> **36.** . *D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a*

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n\geq 0} a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0} b^n.$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a| < 1$ *et* $|b| < 1$. *On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que*

$$\frac{1}{1-a}\times\frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

Si $a = b$*, on trouve directement que* $w_n = \sum_{k=0}^{n} a^n = (n+1)a^n$. *Si* $a \neq b$*, alors il faut utiliser la factorisation*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\times\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

qui donne le résultat.

Exercice 37. *** Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k.$$

1. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
   En observant un produit de cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de $\sum u_n$.
2. On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n).
3. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge. Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

<u>*Solution*</u> **37.** . *1/* $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{n-k}}u_k$ *est le produit de Cauchy des séries de terme général* u_k *et* $\frac{1}{2^k}$.
2/ Utiliser des ε *pour montrer que* (v_n) *tend vers* 0 *: pour* $n > N$

$$|v_n| \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1} 2^k|u_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N}^{n} 2^k|u_k|$$

3/ On calcule

$$\sum_{n=0}^{n} v_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{N} u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{2^{n-k}} = 2\sum_{k=0}^{N} u_k \left(1 - \frac{1}{2^{N-k+1}}\right) = 2\sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{N} \frac{u_k}{2^{N-k}}.$$

D'après la question précédente, le terme de droite tend vers 0 *et donc la somme des* v_n *tend vers 2 fois celle des* u_n*.*

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

(Solutions)