Colle n° 19

Intégrales à paramètre

Exercice 1. Soit $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Montrer que le réel $F(x)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$.
2. Montrer que la fonction $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ainsi définie est décroissante.
3. Montrer que $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
4. Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ▷ **Trois méthodes dans le corrigé**.
5. Calculer $F(1)$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.
6. Montrer que la fonction F est continue sur $]0, +\infty[$.
7. Montrer que $F(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0^+ ▷ **Deux méthodes dans le corrigé**.
8. Montrer que : $\forall x > 1,\ F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x-1) + F(x)$.
   En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt$.

1. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que
   $$f(x,t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$$
   est défini pour $t \in [0, \pi]$.
2. Montrer que la fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
3. Soit $G(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x^2 - 2x\cos t + 1}\, dt$.
   En effectuant le changement de variable $u = \tan \dfrac{t}{2}$, montrer que
   $$G(x) = \frac{\pi}{1 - x^2}$$
   pour tout $x \in [0, 1[$.
4. En déduire $F'(x)$ et $F(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
5. Montrer que la fonction F est définie et continue en 1. En déduire la valeur de
   $$\int_0^{\pi} \ln(1 - \cos t)\, dt.$$